

Оглавление

1. Уравнения Лагранжа	5
2. Преобразование Лежандра	7
3. Немного о произвольных системах ОДУ	8
4. Отображение Пуанкаре	11
5. Простейшие свойства уравнений Гамильтона: первые интегралы, инвариантная мера	13
6. Теорема Пуанкаре о возвращении	13
7. Теорема Шварцшильда–Литтлвуда	14
8. Интегральный инвариант Пуанкаре–Картана	15
9. Производящие функции. Канонические замены	18
10. Маятник с быстро колеблющейся точкой подвеса	19
11. Понижение порядка по Уиттекеру	23
12. Симплектическая структура. Инвариантный вид уравнений Гамильтона	25
13. Скобка Пуассона	26
14. Теорема Лиувилля о вполне интегрируемых системах	28
15. Переменные действие–угол	29
16. Динамика в переменных действие–угол. Резонансные и нерезонансные частоты	31
17. Классическая схема теории возмущений	33
18. Введение в теорию КАМ	35
18.1. Диофантовы частоты.	35
18.2. Стандартные условия невырожденности.	37
18.3. Теорема Колмогорова.	37
19. Неавтономный вариант теоремы Колмогорова	38
20. Изоэнергетический вариант теоремы Колмогорова	40
21. Теория КАМ и проблема устойчивости в гамильтоновой динамике	43
22. Антиинтегрируемый предел. Теорема Обри	46
22.1. Динамика стандартного отображения Чирикова.	46
22.2. Антиинтегрируемый предел.	49
22.3. Доказательство теоремы Обри.	51
22.4. Заключительные соображения.	53
23. Расщепление сепаратрис	53
23.1. Наблюдение Пуанкаре.	53
23.2. Интеграл Пуанкаре.	57
23.3. Доказательство теоремы 12.	58
23.4. Стандартный пример.	62

Гамильтонова механика

Одной из наиболее известных попыток придать стандартному университетскому курсу классической механики современную форму является курс В. И. Арнольда, позднее появившийся в виде учебника [1]. Предлагаемые лекции ориентированы на аналогичные задачи с поправками на приоритеты и вкусы автора. Впрочем, данный курс охватывает лишь некоторые избранные вопросы теории гамильтоновых систем и может рассматриваться лишь как добавочный материал (дополнительные главы) к регулярному курсу классической механики.

1. Уравнения Лагранжа

Сначала я напомним о некоторых основных положениях лагранжевой механики. Надеюсь, с содержанием этого раздела слушатели в той или иной степени знакомы из стандартного курса классической механики.

Классическая механика имеет дело с системами материальных точек. Обычно общие формулы пишутся для конечных систем и подразумевается, что в случае континуума точек (твердое тело) суммы следует заменить на интегралы. Итак, пусть $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$ – радиус-векторы точек системы. Будем обозначать $\vec{r} = (\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ положение системы.

Часто оказывается, что на систему наложены связи, т.е. уравнения вида

$$\varphi_k(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = 0, \quad k = 1, \dots, K, \quad (1.1)$$

где φ_k – гладкие функции, t – время и $(\cdot)' = \frac{d}{dt}(\cdot)$. Уравнения (1.1) в приложениях всегда линейны по скоростям $\dot{\vec{r}}$. Если связи можно представить в виде

$$f_k(\vec{r}, t) = 0, \quad k = 1, \dots, K, \quad (1.2)$$

то они называются голономными или геометрическими. Только такие связи рассматриваются в дальнейшем.

ПРИМЕР. Две точки, соединенные нерастяжимым стержнем:

$$|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|^2 = c^2 = \text{const.}$$

В пространстве \mathbb{R}^{3N} уравнения (1.2) (если они всюду независимы) задают $(3N - K)$ -мерное гладкое многообразие Σ_t , называемое конфигурационным пространством системы или пространством положений. Далее предполагается, что топология Σ_t не меняется с течением времени. Так что при всех t Σ_t гомеоморфно (и даже диффеоморфно) некоторому фиксированному гладкому многообразию Σ .

Число $n = 3N - K$ называется числом степеней свободы. Локальные координаты на Σ_t обозначаются $q = (q_1, \dots, q_n)$. Касательное пространство $T_x \Sigma_t$, $x \in \Sigma_t$, называется пространством виртуальных перемещений.

В примерах связи часто оказываются стационарными, т.е. функции f_k не зависят от переменной t . Тогда конфигурационное пространство и пространство виртуальных перемещений неподвижны в \mathbb{R}^{3N} .

Система удерживается на связи за счет сил реакции $\bar{R} = (\bar{R}_1, \dots, \bar{R}_N)$, где \bar{R}_j – сила реакции, действующая на j -ю точку. Остальные силы называются активными.

Связи называются идеальными, если работа сил реакции на любом виртуальном перемещении равна нулю: $\bar{R} \in (T_x \Sigma_t)^\perp$, где $(\cdot)^\perp$ – ортогональное дополнение в стандартной метрике \mathbb{R}^{3N} . Впрочем, любую связь можно считать идеальной, если касательную компоненту реакции \bar{R}^\parallel (обычно \bar{R}^\parallel ассоциируют с силой трения), отнести к активным силам. При этом для сохранения принципа детерминированности важно, чтобы \bar{R}^\parallel можно было выразить как функцию от \bar{r} , $\dot{\bar{r}}$, t (или что то же самое, от q , \dot{q} , t). В конкретных примерах это всегда удается.

Активные силы $\bar{F} = (\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_N)$ называются потенциальными, если $\bar{F} = \bar{F}(\bar{r}, t)$ и $\bar{F}_j = -\partial V / \partial \bar{r}_j$. Функция $V(\bar{r}, t)$ называется потенциальной энергией.

Далеким обобщением II закона Ньютона являются уравнения Лагранжа. Пусть имеется система материальных точек с идеальными голономными связями. Предположим, что активные силы потенциальны. Пусть $q = (q_1, \dots, q_n)$ – локальные координаты на

пространстве положений Σ_t и $T(q, \dot{q}, t)$, $V(q, t)$ – кинетическая и потенциальная энергия соответственно. Функцией Лагранжа называется $L = T - V$. При указанных условиях движение системы описывается уравнениями

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

или в векторном виде,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (1.3)$$

Уравнения (1.3) имеют второй порядок, так как в них входят вторые производные \ddot{q} . В типичной ситуации их можно представить в виде $\ddot{q} = \Phi(q, \dot{q}, t)$, так что общий порядок системы равен $2n$. Фазовым пространством является касательное расслоение $T\Sigma$. Системы, лагранжианы которых не зависят явно от t , называются автономными.

В учебниках по теоретической механике уравнения Лагранжа (1.3) выводятся из принципа Даламбера–Лагранжа, а в учебниках по физике – из вариационного принципа Гамильтона. Мы не будем делать ни того, ни другого, а направимся дальше к уравнениям Гамильтона.

2. Преобразование Лежандра

Этот раздел также начнем с краткого напоминания.

Произведем преобразование Лежандра по \dot{q} , считая q и t параметрами. Это означает, что мы определяем импульсы

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q, \dot{q}, t), \quad p = (p_1, \dots, p_n) \quad (2.1)$$

и функцию Гамильтона

$$H(q, p, t) = (p\dot{q} - L)|_{\dot{q}=\dot{q}(q,p,t)}. \quad (2.2)$$

Это равенство следует понимать так. В правой части равенства (2.2) \dot{q} всюду необходимо заменить на его выражение через q, p, t . Функция $\dot{q}(q, p, t)$ находится в результате разрешения уравнений (2.1) относительно \dot{q} . Это всегда можно сделать, если

лагранжиан является выпуклым по скоростям (матрица $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2}$ положительно определена), что в классической механике всегда выполнено. Произведение $p\dot{q}$ следует понимать как скалярное произведение: $\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j$.

Преобразование Лежандра (ПЛ) определено не всегда. Одно из самых удобных функциональных пространств для ПЛ является пространство (на самом деле, выпуклый конус) выпуклых функций суперлинейного роста (и то и другое – по скоростям). Суперлинейный рост означает, что для любого ненулевого вектора $v \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{L(sv, q, t)} \rightarrow 0,$$

что в механике всегда выполнено, т.к. классические лагранжианы квадратичны и положительно определены по скоростям.

Следующие свойства ПЛ стандартны.

1) $\text{ПЛ}^2 = \text{id}$ – тождественное преобразование, в частности, $\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}$,

2) если $H = \text{ПЛ}(L)$, то $\frac{\partial H}{\partial q} = -\frac{\partial L}{\partial q}$.

Таким образом, уравнения Лагранжа (1.3) переписываются в виде уравнений Гамильтона

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (2.3)$$

В отличие от вектора скорости \dot{q} , импульс p с точки зрения дифференциальной геометрии является коектором. Поэтому фазовым пространством системы (2.3) является кокасательное расслоение $\mathcal{M} = T^*\Sigma$. В неавтономном случае рассматривают также расширенное фазовое пространство $\mathcal{M} \times \mathbb{R}$.

Уравнение (2.3) имеет вид $\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = v_H$, где v_H – гамильтоново векторное поле на \mathcal{M} . В координатах (q, p)

$$v_H = \begin{pmatrix} \partial H / \partial p \\ -\partial H / \partial q \end{pmatrix}.$$

3. Немного о произвольных системах ОДУ

Рассмотрим на гладком многообразии M произвольную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) $\dot{x} = v(x, t)$ в локальных координатах $x = (x_1, \dots, x_m)$. Считаем, что

решения определены при всех $t \in \mathbb{R}$. Неавтономный случай сводится к автономному путем добавления уравнения $\dot{t} = 1$ и перехода к расширенному фазовому пространству $M \times \mathbb{R}$. Поэтому в дальнейшем считаем, что $v = v(x)$ не зависит от t .

Пусть $g^t: M \rightarrow M$ – сдвиг вдоль решений системы

$$\dot{x} = v(x), \quad (3.1)$$

сопоставляющий любой точке $x \in M$ – начальному условию в момент времени 0 точку $g^t(x)$, в которой окажется решение в момент времени t . Отображения g^t образуют однопараметрическую группу преобразований фазового пространства – фазовый поток g^t :

$$g^0 = \text{id}, \quad g^{-t} = (g^t)^{-1}, \quad g^{t_1+t_2} = g^{t_1} \circ g^{t_2}.$$

Функция $F: M \rightarrow \mathbb{R}$ называется первым интегралом системы (3.1), если она постоянна на решениях:

$$F(x(t)) = \text{const} \quad \text{для любого решения } x(t).$$

Если F гладкая, то она является первым интегралом тогда и только тогда, когда ее производная в силу системы равна нулю:

$$\dot{F} = v(F) = 0.$$

Здесь $v(F) = \sum \frac{\partial F}{\partial x_j} v_j$ – производная F вдоль векторного поля v .

Пусть μ – мера с гладкой плотностью $\rho(x)$, т.е. для любого измеримого множества $D \subset M$

$$\mu(D) = \int_D \hat{\mu}, \quad \hat{\mu} = \rho(x) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m.$$

Дифференциальную форму $\hat{\mu}$ будем называть формой меры μ .

Мера μ называется инвариантной относительно системы (3.1), если для любого μ -измеримого множества $D \subset M$ и любого $t \in \mathbb{R}$

$$\mu(D) = \mu(g^t(D)).$$

Согласно *теореме Лиувилля о сохранении фазового объема* ρ – плотность инвариантной меры тогда и только тогда, когда

$$\text{div}(\rho v) := \sum_{j=1}^m \frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j} = 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $\hat{\mu}$ – форма инвариантной меры и F – первый интеграл. Тогда ограничение системы на неособый уровень интеграла $M_f = \{F = f = \text{const}\}$ имеет инвариантную меру, задаваемую дифференциальной формой $\hat{\nu}$ такой, что

$$dF \wedge \hat{\nu} = \hat{\mu}. \quad (3.2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Форма $\hat{\nu}$, удовлетворяющая равенству (3.2), определена неоднозначно, но ее ограничение на M_f однозначно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как уровень M_f неособый (т.е. $\text{grad } F|_{M_f} \neq 0$), по теореме о неявной функции в окрестности любой точки $x \in M_f$ существуют локальные координаты $y = (y_1, \dots, y_m)$ на M такие, что $y_1 = F - f$. В частности, M_f задается уравнением $y_1 = 0$.

Пусть $\alpha(y)$ – плотность меры μ в координатах y . Запишем уравнения (3.1) в координатах y :

$$\dot{y}_1 = \varphi_1(y) = 0, \quad \dot{y}_2 = \varphi_2(y), \quad \dots, \quad \dot{y}_m = \varphi_m(y). \quad (3.3)$$

Применяя теорему Лиувилля, получаем

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial(\alpha \varphi_j)}{\partial y_j} = \sum_{j=2}^m \frac{\partial(\alpha \varphi_j)}{\partial y_j} = 0. \quad (3.4)$$

Уравнение (3.2) в координатах y принимает вид

$$dy_1 \wedge \hat{\nu} = \alpha(y) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_m. \quad (3.5)$$

Общее решение уравнения (3.5) имеет вид

$$\hat{\nu} = \alpha(y) dy_2 \wedge \dots \wedge dy_m + dy_1 \wedge \lambda,$$

где λ – произвольная $(m-2)$ -форма. При этом второе слагаемое оказывается равным нулю при ограничении на M_f . Поэтому

$$\hat{\nu}|_{M_f} = \alpha(y)|_{y_1=0} dy_2 \wedge \dots \wedge dy_m.$$

Ограничение системы (3.3) на M_f имеет вид

$$\dot{y}_2 = \varphi_2|_{y_1=0}, \quad \dots, \quad \dot{y}_m = \varphi_m|_{y_1=0}.$$

Проверка того, что $\hat{\nu}|_{M_f}$ – форма инвариантной меры (или, другими словами, что $\alpha|_{y_1=0}$ – плотность инвариантной меры в координатах y) теперь сводится к применению теоремы Лиувилля и использованию равенства (3.4). ■

4. Отображение Пуанкаре

Часто исследование динамики системы (3.1) можно (хотя бы локально) свести к задаче исследования динамики отображения Пуанкаре. Имеется в виду следующая конструкция. Рассмотрим в фазовом пространстве M системы (3.1) гиперповерхность Λ трансверсальную векторному полю v (т.е. для любого $x \in \Lambda$ $v(x) \notin T_x\Lambda$). Для любого $x_0 \in \Lambda$ пусть $\gamma_{x_0}(t)$ – решение уравнений (3.1) с начальными условиями $\gamma_{x_0}(0) = x_0$. Будем считать, что через некоторое время $\gamma_{x_0}(t)$ возвращается на Λ . Пусть t_1 – момент первого возвращения: $t_1 = \min\{t > 0: \gamma_{x_0}(t) \in \Lambda\}$. Тогда точка $x_1 = \gamma_{x_0}(t_1)$ называется образом точки x_0 при отображении Пуанкаре \mathcal{P} .

К сожалению, предложенная конструкция обладает рядом недостатков. Во-первых, $\gamma_{x_0}(t)$ может не вернуться на Λ (например, уйти на бесконечность). Тогда \mathcal{P} не определено (по крайней мере, в точке x_0). Впрочем, это не так страшно. Если в динамике нет возвращений, то она не так интересна.

Во-вторых, обычно приходится брать в качестве Λ поверхность с краем или смиряться с нарушением условия трансверсальности на некоторых подмножествах Λ . Край Λ и множества нетрансверсальности создают неприятные граничные эффекты, проявляющиеся в разрывности \mathcal{P} .

Тем не менее помимо огромной концептуальной важности отображения Пуанкаре следует иметь в виду ряд ситуаций, когда указанные недостатки себя не проявляют. Одна из таких ситуаций – локальная – позволяет свести исследование окрестности периодического решения к задаче исследования окрестности неподвижной точки отображения \mathcal{P} .

Другая ситуация возникает, если система неавтономна, причем зависимость v от t периодическая. Как уже было сказано, после добавления уравнения $\dot{t} = 1$ система становится автономной с фазовым пространством $M \times \mathbb{R}$, а лучше, с учетом периодичности по времени, $M \times \mathbb{T}$, где $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\tau\mathbb{Z}$ (τ – период). Но тогда в качестве Λ можно взять $M \times \{0\}$. В результате автоматически получаем и возвращаемость, и отсутствие краевых эффектов.

Одно из важнейших концептуальных следствий, вытекающих из конструкции отображения Пуанкаре, состоит в том,

что динамику дискретных систем (отображений) следует считать параллельной динамике для дифференциальных уравнений (и столь же важной).

Пусть имеется дискретная динамическая система, т.е. отображение $T: N \rightarrow N$. Траекториями T называются последовательности вида $x, T(x), T^2(x), \dots$. Если T обратимо, траектории можно продолжать и в обратную сторону относительно дискретного времени.

Скажем, что $F: N \rightarrow \mathbb{R}$ – первый интеграл для T , если $F \circ T = F$. Очевидно, первый интеграл постоянен на любой траектории.

Пусть на N задана мера¹ μ . Скажем, что μ инвариантна относительно T , если для любого μ -измеримого множества $D \subset M$ полный прообраз $T^{-1}(D)$ также измерим и $\mu(T^{-1}(D)) = \mu(D)$.

Отметим, что на первый взгляд кажется более естественным писать в последнем равенстве T вместо T^{-1} . Однако предложенное определение обладает тем достоинством, что является осмысленным также для отображений T , не являющихся взаимно однозначными. Такие отображения (сохраняющие меру μ) называются *эндоморфизмами* измеримого пространства (M, μ) . Взаимно однозначный эндоморфизм называется *автоморфизмом* измеримого пространства.

ЗАДАЧА 1. Проверить, что отображение окружности $\mathbb{T} = \{x \bmod 1\}$ на себя $x \mapsto 2x \bmod 1$ является эндоморфизмом пространства (\mathbb{T}, dx) , где dx – мера Лебега.

ЗАДАЧА 2. Предположим, что система (3.1) имеет первый интеграл $F: M \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда соответствующее отображение Пуанкаре также имеет первый интеграл.

ЗАДАЧА 3. Предположим, что система (3.1) имеет инвариантную меру с гладкой плотностью $\rho \geq 0$. Тогда соответствующее отображение Пуанкаре также имеет инвариантную меру с гладкой неотрицательной плотностью.

¹Меры, использующиеся в динамике, всегда σ -аддитивны. Строго говоря, прежде чем говорить о мере, сначала надо задать на N σ -алгебру измеримых подмножеств. Но не будучи педантом, а также за недостатком времени, я не буду это делать явно.

5. Простейшие свойства уравнений Гамильтона: первые интегралы, инвариантная мера

Укажем два важных свойства уравнений Гамильтона.

(1) Продифференцируем H в силу уравнений (т.е. вдоль решений системы (2.3)):

$$\frac{dH}{dt} = \sum \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Следовательно если гамильтониан H не зависит от t , он является первым интегралом системы (2.3).

(2) Возьмем дивергенцию гамильтонова векторного поля v_H :

$$\operatorname{div} v_H = \sum \left(\frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} + \frac{\partial}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) = 0.$$

Следовательно, мера, плотность которой в координатах q, p равна 1, инвариантна. Часто бывает полезным ограничить систему на неособый уровень энергии $\{H = \text{const}\}$. Согласно предложению 3.1 полученная система также будет иметь инвариантную меру с гладкой плотностью.

Отображение Пуанкаре в случае гамильтоновых систем играет настолько же важную роль, что и в общей ситуации. Но здесь конструкцию слегка модифицируют. Первым шагом является переход на уровень энергии, и лишь затем рассматривают (на уровне энергии) гиперповерхность Λ . Почему следует действовать так, будет ясно позднее (см. задачу 9).

6. Теорема Пуанкаре о возвращении

Пусть T – эндоморфизм пространства (M, μ) , $\mu(M) < \infty$ и $A \subset M$ – измеримое множество. Точка $x \in A$ называется возвращающейся (в A) если $T^n(x) \in A$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого измеримого $A \subset M$ μ -почти все точки $x \in A$ возвращающиеся.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $N \subset A$ – множество, состоящее из всех невозвращающихся в A точек. Тогда $N = A \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} T^{-n}(M \setminus A) \right)$ измеримо.

Если $x \in N$, то для любого натурального n имеем $T^n(x) \notin A$. Следовательно $T^n(x) \notin N$, откуда вытекает, что $x \notin T^{-n}(N)$. Поэтому $N \cap T^{-n}(N) = \emptyset$.

Отсюда следует, что $N, T^{-1}(N), T^{-2}(N), \dots$ попарно не пересекаются. (Действительно, при $0 \leq n_1 < n_2$ $T^{-n_1}(N) \cap T^{-n_2}(N) = T^{-n_1}(N \cap T^{-n_2+n_1}(N)) = \emptyset$.)

Поэтому

$$\infty > \mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(N)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(T^{-n}(N)) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(N).$$

Это возможно лишь при $\mu(N) = 0$. ■

СЛЕДСТВИЕ 6.1. *μ -почти все $x \in A$ возвращаются бесконечное число раз.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если точка $x \in A$ возвращается лишь конечное число раз, то x не возвращается для T^p для некоторого $p \in \mathbb{N}$. Множества N_p соответствующих невозвращающихся точек имеют μ -меру нуль. Так как $\mu(\bigcup_{p \in \mathbb{N}} N_p) = 0$, множество возвращающихся бесконечное число раз точек имеет меру $= \mu(A)$. ■

В связи с теоремой Пуанкаре о возвращении возникает ряд парадоксов. Не хочу лишать слушателей удовольствия прочитать о них самостоятельно, например, в [1], [4].

7. Теорема Шварцшильда–Литтлвуда

Что можно сказать в случае бесконечной меры M ?

Пусть T – автоморфизм пространства (M, μ) , причем возможно, $\mu(M) = \infty$. Рассмотрим множество $K \subset M$, $\mu(K) < \infty$. Пусть P – множество точек из K , положительные полутраектории которых лежат в K :

$$x \in P \iff T^n(x) \in K \text{ для любого } n \geq 0.$$

ТЕОРЕМА 2. *Вероятность захвата равна нулю, то есть*

$$\mu\left(\bigcup_{n < 0} T^n(P) \setminus K\right) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$P_k = \bigcup_{n \geq k} T^n(P), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad P_\infty = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} P_k, \quad F_k = P_k \setminus P_{k+1}.$$

Очевидно, что

1. $\dots \supset P_{-1} \supset P_0 \supset P_1 \supset \dots$;
2. $P_0, P_1, \dots \subset K$;
3. $F_k \cap F_l = \emptyset, k \neq l$;
4. $F_k \cap P_\infty = \emptyset$.
5. $P = P_0 = P_\infty \cup (\bigcup_{k=0}^\infty F_k)$;
6. $F_{k+1} = T(F_k)$, поэтому $\mu(F_k)$ не зависит от k ;

Таким образом, имеем:

$$\infty > \mu(K) \stackrel{(2)}{>} \mu(P_0) \stackrel{(3,4,5)}{=} \mu(P_\infty) + \sum_{k=0}^\infty \mu(F_k) \stackrel{(6)}{\implies} \mu(F_k) = 0.$$

Пусть теперь $n < 0$. Тогда

$$\begin{aligned} T^n(P) \setminus K \subset T^n(P) \setminus P &= (T^n(P) \setminus T^{n+1}(P)) \cup \dots \cup (T^{-1}(P) \setminus P) \\ &= F_n \cup \dots \cup F_{-1}. \end{aligned}$$

Следовательно $\bigcup_{n < 0} T^n(P) \setminus K \subset \bigcup_{n < 0} F_n$, откуда получаем

$$\mu\left(\bigcup_{n < 0} T^n(P) \setminus K\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n < 0} F_n\right) = 0.$$

■

8. Интегральный инвариант Пуанкаре–Картана

Вернемся к рассмотрению гамильтоновой системы (2.3). Будем считать, что гамильтониан H может явно зависеть от t . Таким образом, за динамикой естественно наблюдать в расширенном фазовом пространстве $\widehat{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \times \mathbb{R}$. Уравнения Гамильтона задаются в $\widehat{\mathcal{M}}$ в координатах (q, p, t) векторным полем

$$v_H = (H_p, -H_q, 1),$$

где для краткости введены обозначения $H_p = \partial H / \partial p$, $H_q = \partial H / \partial q$. В $\widehat{\mathcal{M}}$ имеется дифференциальная 1-форма $\sigma = p dq - H dt$.

Ее дифференциал $d\sigma$ является 2-формой, а значит, билинейной кососимметрической функцией на касательном пространстве $T_x\widehat{\mathcal{M}}$ в любой точке $x \in \widehat{\mathcal{M}}$. Ненулевой вектор $v \in T_x\widehat{\mathcal{M}}$ называется аннулятором формы $d\sigma$, если для любого вектора $u \in T_x\widehat{\mathcal{M}}$ имеем $d\sigma(u, v) = 0$.

ЛЕММА 8.1. *Векторное поле v_H является аннулятором 2-формы $d\sigma$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $u = (a, b, c)$, где $a, b \in \mathbb{R}^n$ и $c \in \mathbb{R}$ – компоненты, соответствующие координатам q , p и t соответственно. Так как $d\sigma = dp \wedge dq + dH \wedge dt$, получаем

$$\begin{aligned} d\sigma(u, v_H) &= bH_p - a(-H_q) - (H_q a + H_p b + H_t c) \cdot 1 \\ &\quad + (H_q H_p + H_p(-H_q) + H_t \cdot 1) \cdot c = 0 \end{aligned}$$

(произведения векторов в этом равенстве как всегда, понимаются как скалярные). ■

ЗАДАЧА 4. Доказать следующую лемму обратную к лемме 8.1:

ЛЕММА 8.2. *Если векторное поле v является аннулятором 2-формы $d\sigma$, то v параллельно v_H , т.е. $v = f v_H$ для некоторой функции $f: \widehat{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{R}$.*

Пусть γ – кривая на $\widehat{\mathcal{M}}$. Выпустив из каждой точки γ траекторию уравнений (2.3), получим двумерную поверхность, называемую трубкой траекторий.

СЛЕДСТВИЕ 8.1. *Пусть γ_0 – замкнутая кривая в $\widehat{\mathcal{M}}$ и γ – замкнутая кривая, охватывающая ту же трубку траекторий². Тогда*

$$\int_{\gamma_0} \sigma - \int_{\gamma} \sigma = 0.$$

Действительно, по формуле Стокса эта разность равна $\int_S d\sigma$, где S – участок боковой поверхности трубки между γ_0 и γ . Трубка траекторий двумерна, причем в любой точке касательная плоскость к ней содержит аннулятор v_H формы σ . Поэтому ограничение $\sigma|_S$ равно нулю.

²Точнее, γ может быть получена из γ_0 в результате непрерывной деформации вдоль трубки траекторий.

ВОПРОС. Где в этом рассуждении используется двумерность трубки траекторий?

Пусть $\varphi^\tau : \widehat{\mathcal{M}} \rightarrow \widehat{\mathcal{M}}$ – фазовый поток уравнений Гамильтона в расширенном фазовом пространстве.

СЛЕДСТВИЕ 8.2. *Отображения φ^τ сохраняют 2-форму $d\sigma = dp \wedge dq - dH \wedge dt$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что интеграл по любому гладко вложенному двумерному диску $D \subset \widehat{\mathcal{M}}$ от формы $d\sigma$ равен интегралу от $(\varphi^\tau)^*(d\sigma)$. Действительно,

$$\begin{aligned} \int_D d\sigma &\stackrel{(1)}{=} \int_{\partial D} \sigma \stackrel{(2)}{=} \int_{\varphi^\tau(\partial D)} \sigma \stackrel{(3)}{=} \int_{\partial D} (\varphi^\tau)^* \sigma \\ &\stackrel{(4)}{=} \int_D d(\varphi^\tau)^* \sigma \stackrel{(5)}{=} \int_D (\varphi^\tau)^* d\sigma. \end{aligned}$$

Здесь равенства (1) и (4) – формула Стокса, равенство (2) – следствие 8.1, а остальные – стандартные свойства дифференциальных форм. ■

Предположим, что система автономна. Тогда вместо расширенного фазового пространства естественно рассматривать обычное \mathcal{M} . Поток φ^τ очевидным образом “опускается” до потока $g^\tau : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ так, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{M}} & \xrightarrow{\varphi^\tau} & \widehat{\mathcal{M}} \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \text{pr}_1 \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{g^\tau} & \mathcal{M} \end{array}$$

коммутативна. Здесь $\text{pr}_1 : \widehat{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ – проекция на первый сомножитель.

СЛЕДСТВИЕ 8.3. *Фазовый поток g^τ сохраняет 2-форму $\omega = dp \wedge dq$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $D \subset \mathcal{M}$ – гладко вложенный двумерный диск. Для доказательства равенства $\int_D \omega = \int_D (g^t)^* \omega$ следует выйти в расширенное фазовое пространство (при этом $dt|_D$ будет равным 0) и сослаться на следствие 8.2. ■

9. Производящие функции. Канонические замены

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.1. Пусть $P = (P_1, \dots, P_n)$, $Q = (Q_1, \dots, Q_n)$, T – другие координаты на расширенном фазовом пространстве, а $\mathcal{H} = \mathcal{H}(Q, P, T)$, S – гладкие функции³ такие, что

$$p dq - H dt = P dQ - \mathcal{H} dT - dS. \quad (9.1)$$

Тогда в новых координатах уравнения (2.3) имеют вид

$$Q' = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P}, \quad P' = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q}, \quad (\cdot)' = \frac{d}{dT}. \quad (9.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аннуляторы форм

$$d(p dq - H dt), \quad d(P dQ - \mathcal{H} dT - dS) \quad \text{и} \quad d(P dQ - \mathcal{H} dT)$$

совпадают. Поэтому согласно лемме 8.2 гамильтоново векторное поле $v_{\mathcal{H}}$, задающее систему 9.2, параллельно исходному гамильтонову векторному полю v_H . ■

Функция S называется производящей функцией канонической замены $(q, p, t) \rightarrow (Q, P, T)$.

Предположим, что $T = t$ и (q, Q, t) можно взять в качестве локальных координат на $\widehat{\mathcal{M}}$. Тогда S можно выразить через (q, Q, t) . Из (9.1) получаем

$$p dq - H dt = P dQ - \mathcal{H} dT - S_q dq - S_Q dQ - S_t dt.$$

Следовательно

$$p = -S_q, \quad P = S_Q, \quad \mathcal{H} = H - S_t. \quad (9.3)$$

Первые два равенства (9.3) можно использовать для того, чтобы представить замену переменных в обычном виде:

$$Q = Q(q, p, t), \quad P = P(q, p, t) \quad \text{или} \quad q = q(Q, P, t), \quad p = p(Q, P, t).$$

³ S – функция на $\widehat{\mathcal{M}}$, но ниже мы увидим, что в качестве аргументов удобно взять не (Q, P, T) и даже не (q, p, t) , а нечто другое.

Например, чтобы выразить новые переменные через старые, следует разрешить уравнение $p = -S_q(q, Q, t)$ относительно Q . Согласно теореме о неявной функции для того, чтобы это было возможно⁴, надо потребовать выполнения условия

$$\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q \partial Q}\right) \neq 0.$$

Теперь, чтобы выразить P через q, p, t , достаточно подставить полученную функцию $Q(q, p, t)$ в уравнение $P = S_q(q, Q, t)$.

ВОПРОС. Что надо потребовать от S для того, чтобы q и p можно было локально выразить через Q, P, t ?

Часто требуется искать замену переменных близкую к тождественной. В этом случае производящая функция S не годится, но можно использовать другой тип производящей функции. Перепишем (9.1) при $t = T$ в следующем виде:

$$p dq + Q dP - H dt = -\mathcal{H} dT - d(PQ - S).$$

Предположим, что функция⁵ $W = PQ - S$ может быть выражена через q, P, t . Тогда

$$p = W_q, \quad Q = W_P, \quad \mathcal{H} = H + W_t. \quad (9.4)$$

ВОПРОС. Что надо потребовать от W для того, чтобы можно было локально выразить q и p через Q, P, t , а также Q и P через q, p, t ?

ЗАДАЧА 5. Найти производящую функцию $W(q, P, t)$ тождественной замены переменных $(q, p) \mapsto (Q, P) = (q, p)$.

10. Маятник с быстро колеблющейся точкой подвеса

Напомним, что математическим маятником называется механическая система, состоящая из невесомого недеформируемого

⁴По крайней мере, локально.

⁵Наблюдательный слушатель или читатель заметит, что переход от функции S к функции W сильно напоминает преобразование Лежандра. В динамике производящие функции типа S называют дискретными лагранжианами, а производящие функции типа W – дискретными гамильтонианами.

стержня AB , у которого конец A закреплен, а к концу B прикреплена точка массы m . Считается, что движение происходит в неподвижной вертикальной плоскости в поле сил тяжести.

Усложним задачу. Пусть точка подвеса A вертикально колеблется, причем период и амплитуда ее колебаний малы (порядка ε). Нас интересует вопрос: какое влияние оказывает колебание точки подвеса на динамику при малых ε ?

Рассмотрим в плоскости движения неподвижную систему координат такую, что ось x горизонтальна, ось y вертикальна и точка A находится на оси y . Будем считать, что в этой системе координат

$$A(t) = \left(0, a\varepsilon \cos \frac{\omega t}{\varepsilon}\right), \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Здесь g – ускорение силы тяжести, $l = |AB|$ – длина маятника. Частота ω введена для того, чтобы можно было считать малый параметр ε безразмерным. Таким образом, параметр a имеет размерность длины.

Система имеет одну степень свободы. Напишем лагранжиан. В качестве координаты на конфигурационном пространстве естественно взять угол φ между маятником и вертикалью. Пусть (x, y) – координаты точки B . Тогда

$$\begin{aligned} x &= l \sin \varphi, & \dot{x} &= l \dot{\varphi} \cos \varphi, \\ y &= a\varepsilon \cos \frac{\omega t}{\varepsilon} - l \cos \varphi, & \dot{y} &= -a\omega \sin \frac{\omega t}{\varepsilon} + l \dot{\varphi} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} L &= \frac{mv^2}{2} - mgy \\ &= \frac{m}{2} \left(l^2 \dot{\varphi}^2 - 2al\omega \dot{\varphi} \sin \varphi \sin \frac{\omega t}{\varepsilon} + a^2 \omega^2 \sin^2 \frac{\omega t}{\varepsilon} \right) \\ &\quad - mg \left(a\varepsilon \cos \frac{\omega t}{\varepsilon} - l \cos \varphi \right). \end{aligned}$$

Отметим, что третье слагаемое в первой скобке и первое слагаемое во второй скобке не зависят ни от φ , ни от $\dot{\varphi}$. Поэтому они не влияют на уравнения движения и могут быть опущены. Кроме того лагранжиан L можно поделить на постоянный коэффициент ml^2 . Это также не отразится на уравнениях. С учетом этих

замечаний лагранжиан приобретает вид

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \frac{a\omega}{l}\dot{\varphi} \sin \varphi \sin \frac{\omega t}{\varepsilon} + \omega^2 \cos \varphi.$$

Произведем преобразование Лежандра:

$$p = \dot{\varphi} - \frac{a\omega}{l} \sin \varphi \sin \frac{\omega t}{\varepsilon},$$

$$H = \frac{p^2}{2} + p \frac{a\omega}{l} \sin \varphi \sin \frac{\omega t}{\varepsilon} + \frac{a^2 \omega^2}{2l^2} \sin^2 \varphi \sin^2 \frac{\omega t}{\varepsilon} - \omega^2 \cos \varphi.$$

Попробуем подобрать каноническую замену переменных так, чтобы гамильтониан перестал зависеть от t в главном (нулевом) приближении по ε . Замену $(\varphi, p, t) \mapsto (\Phi, P, t)$ ищем в виде

$$p = \frac{\partial W}{\partial \varphi}, \quad \Phi = \frac{\partial W}{\partial P}, \quad W = P\varphi + \varepsilon f\left(\varphi, P, \frac{\omega t}{\varepsilon}\right),$$

где f 2π -периодична по последнему аргументу⁶. Имеем:

$$p = P + \varepsilon f_\varphi, \quad \Phi = \varphi + \varepsilon f_P.$$

Новый гамильтониан

$$\mathcal{H}\left(\Phi, P, \frac{\omega t}{\varepsilon}\right) = \varepsilon f_t + H\left(\varphi, p, \frac{\omega t}{\varepsilon}\right)$$

$$= \omega D_3 f + H\left(\Phi - \varepsilon f_P, P + \varepsilon f_\varphi, \frac{\omega t}{\varepsilon}\right),$$

где D_3 – производная по третьему аргументу. Получаем

$$\mathcal{H} = \omega D_3 f(\Phi, P, \tau) + H(\Phi, P, \tau) + O(\varepsilon), \quad \tau = \frac{\omega t}{\varepsilon}.$$

Следовательно, \mathcal{H} не будет зависеть от t в нулевом приближении по ε , если функция

$$\omega D_3 f(\Phi, P, \tau) + P \frac{a\omega}{l} \sin \Phi \sin \tau + \frac{a^2 \omega^2}{2l^2} \sin^2 \Phi \sin^2 \tau$$

не зависит от τ . Выбирая

$$f(\Phi, P, \tau) = P \frac{a}{l} \sin \Phi \cos \tau + \frac{a^2 \omega}{8l^2} \sin^2 \Phi \sin 2\tau,$$

⁶Указанное условие периодичности требуется для того, чтобы замена переменных была равномерно близка к тождественной при всех t .

получаем⁷ $F = \frac{a^2\omega^2}{4l^2} \sin^2 \Phi$. Итак, в новых переменных

$$\mathcal{H} = \frac{P^2}{2} - \omega^2 \cos \Phi + \frac{a^2\omega^2}{4l^2} \sin^2 \Phi + O(\varepsilon),$$

причем часть гамильтониана, содержащаяся в $O(\varepsilon)$, 2π -периодична по τ .

ЗАМЕЧАНИЕ 10.1. При желании можно отправить зависимость от времени в порядок $O(\varepsilon^2)$, и даже в $O(\varepsilon^N)$ для произвольного $N > 0$, и даже сделать величиной порядка $e^{-c/|\varepsilon|}$ для некоторой положительной постоянной c . Но большего достичь в принципе нельзя: какую бы 2π -периодическую по τ каноническую близкую к тождественной замену переменных мы ни сделали, зависимость от переменных τ останется в членах, имеющих порядок больший, чем $e^{-C/|\varepsilon|}$ для некоторой положительной постоянной C .

Исследуем полученную систему, пренебрегая величинами $O(\varepsilon)$. Для этого заметим, что с точки зрения вида гамильтониана \mathcal{H} систему можно трактовать как движение материальной точки по прямой (или окружности $\Phi \bmod 2\pi$) в поле сил с потенциалом

$$V = \omega^2 \left(-\cos \Phi + \frac{a^2}{4l^2} \sin^2 \Phi \right).$$

Как обычно, фазовый портрет (линии уровня интеграла энергии)

$$\frac{P^2}{2} - \omega^2 \cos \Phi + \frac{a^2\omega^2}{4l^2} \sin^2 \Phi = \text{const}$$

удобно рисовать под графиком потенциальной энергии. В зависимости от значения параметра a имеем два случая: см. рисунков 10.1.

На левой части рисунка изображен случай “малой” амплитуды⁸: $a^2 < 2l^2$. В этой ситуации нет никаких качественных различий с обычным математическим маятником, когда точка подвеса не колеблется.

Ситуация качественно меняется, когда $a^2 > 2l^2$ (правая часть рисунка). В этом случае фазовый портрет перестраивается и положение равновесия $\Phi = \pm\pi$ становится устойчивым. Это значит,

⁷Еще раз отметим, что функция f должна быть периодической по τ .

⁸Напомним, что на самом деле амплитуда всегда порядка ε .

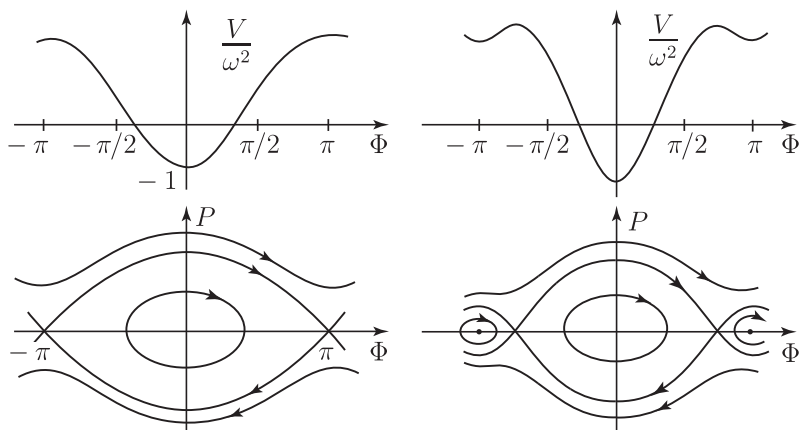


Рис. 10.1. Фазовые портреты: слева при $a^2 < 2l^2$, справа – при $a^2 > 2l^2$.

что в случае “не очень малой” амплитуды происходит стабилизация верхнего положения равновесия маятника.

Говорят, в свое время Капица наблюдал это явление, подсовывая палочку с грузиком к швейной машинке.

ЗАДАЧА 6. Выяснить, как выглядит фазовый портрет при $a^2 = 2l^2$.

Отдельного обсуждения заслуживает вопрос, не разрушится ли эффект стабилизации при учете членов $O(\varepsilon)$? Мы оставим этот вопрос на будущее (см. раздел 21, пункт 2).

11. Понижение порядка по Уиттекеру

Пусть $H = H(q, p)$ не зависит от t . Рассмотрим уровень энергии $H = h$. Это $(2m - 1)$ -мерное многообразие M_h . Попробуем ограничить исходную систему (2.3) на M_h так, чтобы уравнения сохранили обычный (канонический) гамильтонов вид. Для этого будем считать M_h расширенным фазовым пространством системы с $m - 1$ степенями свободы. Роль времени играет координата $\tau = q_s$ такая, что $H_{p_s} \neq 0$ (тогда $\dot{q}_s \neq 0$ и замена $t \mapsto q_s$ осмысленна). Далее считаем, что $s = m$.

Выразим из уравнения $H = h$

$$p_m = -K(q_1, \dots, q_{m-1}, p_1, \dots, p_{m-1}, q_m, h).$$

ТЕОРЕМА 3. *Исходные уравнения Гамильтона на уровне энергии M_h локально эквивалентны уравнениям*

$$q'_j = K_{p_j}, \quad p'_j = -K_{q_j}, \quad (\cdot)' = \frac{d}{d\tau}, \quad j = 1, \dots, m-1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $Q = (q_1, \dots, q_{m-1})$ и $P = (p_1, \dots, p_{m-1})$. Тогда

$$p dq - H dt = P dQ - K d\tau - d(tH) + t dH. \quad (11.1)$$

Исходное гамильтоново векторное поле касается M_h и является аннулятором дифференциала этой формы. Следовательно оно также является аннулятором ограничения дифференциала формы (11.1) на M_h . Отсюда вытекает, что оно является аннулятором формы $d(P dQ - K d\tau)$ на M_h . Таким образом, оно параллельно гамильтонову векторному полю с гамильтонианом K . ■

Следует отметить, что за понижение порядка пришлось заплатить определенную цену: система перестала быть автономной.

Операцию, в определенном смысле, обратную к понижению порядка по Уиттекеру описывает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.1. *Пусть $H = H(q, p, t)$ – функция Гамильтона. Тогда соответствующие уравнения Гамильтона могут быть получены из уравнений*

$$q' = \mathcal{H}_p, \quad p' = -\mathcal{H}_q, \quad t' = \mathcal{H}_E, \quad E' = -\mathcal{H}_t,$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q, p, s, E) = H(p, q, s) + E, \quad (\cdot)' = \frac{d}{ds}$$

в результате проекции $(q, s; p, E) \mapsto (q, p, t = s)$ и перехода к времени $t = s + \text{const}$.

ЗАДАЧА 7. Доказать предложение 11.1.

Таким способом из неавтономной системы получаем автономную ценой увеличения числа степеней свободы.

12. Симплектическая структура. Инвариантный вид уравнений Гамильтона

Что отличает уравнения Гамильтона, от произвольных систем дифференциальных уравнений? В определенном смысле этот вопрос мы обсуждали в разделе об интегральном инварианте. Однако хотелось бы иметь ответ в инвариантных (бескоординатных) терминах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.1. Замкнутая невырожденная дифференциальная 2-форма ω на многообразии M называется симплектической структурой. Пара (M, ω) называется симплектическим многообразием.

ТЕОРЕМА 4 (ДАРБУ). В окрестности любой точки многообразия M имеются локальные координаты $(q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$, в которых симплектическая структура имеет вид $\omega = dp \wedge dq$.

СЛЕДСТВИЕ 12.1. Размерность симплектического многообразия всегда четная.

Такие координаты (q, p) называются каноническими или координатами Дарбу.

Заметим, что ω сопоставляет любому векторному полю v на M дифференциальную 1-форму (ковекторное поле) f :

$$f(\cdot) = \omega(\cdot, v),$$

где на пустое место \cdot можно поставить произвольное векторное поле. Пусть J – обратный оператор. Он существует, так как ω невырождена и размерности векторных пространств $T_x M$ и $T_x^* M$ ($x \in M$) совпадают. Тогда

$$f(\cdot) = \omega(\cdot, Jf).$$

Пусть $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая функция. Она задает 1-форму dH .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12.2. Назовем векторное поле $v_H = JdH$ на M гамильтоновым векторным полем с гамильтонианом H .

Таким образом,

$$dH(\cdot) = \omega(\cdot, v_H).$$

ЗАДАЧА 8. Проверить, что в канонических координатах гамильтоново векторное поле имеет привычный вид $v_H = (H_p, -H_q)$.

ЗАДАЧА 9. Проверить, что отображение Пуанкаре, описанное в последнем абзаце раздела 5, является симплектическим.

УКАЗАНИЕ. Симплектической структурой на Λ является ограничение на Λ исходной симплектической структуры.

13. Скобка Пуассона

Пусть (M, ω) – симплектическое многообразие. Для любых двух функций H, F на M определим их скобку Пуассона

$$\{H, F\} := \partial_{v_H} F = dF(v_H).$$

Здесь ∂_{v_H} – оператор дифференцирования вдоль векторного поля v_H . Первое равенство – определение, а второе – просто тождество.

Следующие свойства скобки Пуассона сразу вытекают из определения.

1. Гладкая функция F – первый интеграл уравнений Гамильтона с гамильтонианом $H \iff \{H, F\} = 0$.

2. $\{H, F\} = \omega(v_H, v_F)$.

3. Операция $\{\cdot, \cdot\}$ билинейна и кососимметрична.

4. В канонических координатах

$$\{H, F\} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial F}{\partial q_j} - \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial F}{\partial p_j} \right).$$

Кроме того прямым вычислением в канонических координатах проверяется

5. Тождество Лейбница:

$$\{FG, H\} = F\{G, H\} + \{F, H\}G,$$

а также

6. Тождество Якоби:

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0$$

для любых трех функций $F, G, H: M \rightarrow \mathbb{R}$.

Напомним, что алгеброй Ли называется векторное пространство L с билинейной кососимметрической операцией $[\cdot, \cdot]$ (коммутатором), удовлетворяющей тождеству Якоби $[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0$ для любых $a, b, c \in L$.

ПРИМЕРЫ. а. Пространство квадратных матриц порядка n^9 – алгебра Ли относительно коммутатора $[A, B] = AB - BA$.

б. Пространство гладких векторных полей на многообразии – алгебра Ли относительно векторного коммутатора $u, v \mapsto [u, v]$, где векторное поле $[u, v]$ таково, что соответствующий ему дифференциальный оператор $\partial_{[u, v]}$ равен¹⁰ дифференциальному оператору (первого порядка!) $\partial_u \partial_v - \partial_v \partial_u$.

в. Пространство гладких функций на симплектическом многообразии – алгебра Ли относительно $\{\cdot, \cdot\}$.

ТЕОРЕМА 5. Для любых двух функций F, G на M

$$[v_F, v_G] = v_{\{F, G\}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для произвольной функции φ на M имеем

$$\begin{aligned} \partial_{v_{\{F, G\}}} \varphi &= \{\{F, G\}, \varphi\} = -\{\{G, \varphi\}, F\} - \{\{\varphi, F\}, G\} \\ &= \{F, \{G, \varphi\}\} - \{G\{F, \varphi\}\} = (\partial_{v_F} \partial_{v_G} - \partial_{v_G} \partial_{v_F}) \varphi. \end{aligned}$$

■

СЛЕДСТВИЕ 13.1. *Отображение $F \mapsto v_F$ является гомоморфизмом алгебр Ли.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13.1 (ТЕОРЕМА ПУАССОНА). Пусть F и G – первые интегралы автономной гамильтоновой системы (M, ω, H) . Тогда $\{F, G\}$ – тоже первый интеграл.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $\{H, F\} = \{H, G\} = 0$, то согласно тождеству Якоби имеем: $\{H, \{F, G\}\} = 0$.

■

⁹И вообще любая ассоциативная алгебра.

¹⁰К сожалению, надо быть готовыми к тому, что в разных учебниках вы можете встретить не эквивалентные друг другу (отличающиеся знаком) определения коммутатора. Это же касается скобки Пуассона.

К сожалению, это утверждение редко приносит пользу в задачах поиска новых интегралов движения. Как правило, скобка Пуассона двух первых интегралов оказывается уже известным интегралом или вообще нулем.

Функции F, G такие, что $\{F, G\} = 0$, называются коммутирующими или находящимися в инволюции.

14. Теорема Лиувилля о вполне интегрируемых системах

Пусть имеется система (M, ω, H) ($\dim M = 2m$), обладающая m первыми интегралами F_1, \dots, F_m в инволюции: $\{F_j, F_k\} = 0$. Рассмотрим интегральный уровень

$$M_f = \{z \in M : F_j(z) = f_j = \text{const}, j = 1, \dots, m\}. \quad (14.1)$$

ТЕОРЕМА 6 (ЛИУВИЛЛЬ–АРНОЛЬД). Пусть на M_f функции F_j независимы. Тогда

(1) M_f — гладкое многообразие инвариантное относительно гамильтоновой системы $\dot{z} = v_H$.

(2) Каждая компактная компонента связности M_f диффеоморфна m -мерному тору¹¹ \mathbb{T}^m .

(3) В некоторых координатах $(\varphi_1, \dots, \varphi_m) \bmod 2\pi$ на \mathbb{T}^m уравнения Гамильтона имеют вид $\dot{\varphi} = \nu$, где $\nu = \nu(f) \in \mathbb{R}^m$ — постоянный вектор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (1) сразу следует из теоремы о неявной функции. Чтобы проверить (2) и (3), заметим, что векторные поля $v_j = v_{F_j}$ касаются M_f . (Действительно, $\partial_j F_k = \{F_j, F_k\} = 0$.) Так как функции F_j независимы на M_f , векторные поля v_j также независимы на M_f . Кроме того,

$$[v_j, v_k] = v_{\{F_j, F_k\}} = 0.$$

Остается применить следующий геометрический факт (см., например, [1]):

ЛЕММА 14.1. Компактное связное m -мерное многообразие, на котором имеется m всюду независимых коммутирующих

¹¹Если отказаться от предположения о компактности, M_f оказывается цилиндром $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$, $0 \leq k \leq m$ (см. [1]).

векторных полей, диффеоморфно тору \mathbb{T}^m . Более того, на нем существуют угловые координаты $(\varphi_1, \dots, \varphi_m) \bmod 2\pi$ такие, что все m векторных полей постоянны (имеют вид $v = \text{const} \in \mathbb{R}^m$).

■

ЗАДАЧА 10. Проверить, что торы \mathbb{T}_f^m из теоремы 6 лагранжевы, то есть $\dim \mathbb{T}_f^m = m$ и ограничение симплектической структуры на \mathbb{T}_f^m равно нулю.

Гамильтоновы системы, обладающие полным (в количестве m) набором почти везде независимых первых интегралов в инволюции, называются (вполне) интегрируемыми по Лиувиллю.

15. Переменные действие–угол

Удобным средством исследования вполне интегрируемых систем и (что более важно) систем, близких к таковым, являются переменные действие–угол. Эти переменные строятся в предположении, что совместные уровни первых интегралов компактны. Переменные действие–угол (φ, I) (I – действие, φ – угол) удовлетворяют следующим свойствам:

- $\omega = dI \wedge d\varphi$ (каноничность),
- $H = H(I)$ (другими словами, I – первые интегралы),
- $\varphi = \varphi \bmod 2\pi$ (т.е. φ – угловые координаты на торах M_h).

(А). Одна степень свободы. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2 = \{q, p\}$ – область и $H: D \rightarrow \mathbb{R}$. Рассмотрим систему $(D, dp \wedge dq, H)$. Линии уровня гамильтониана

$$\gamma_h = \{(q, p) \in D: H(q, p) = h\}$$

являются инвариантными кривыми. Для простоты будем считать, что γ_h связные.

Предположим, что для любого $h \in (a, b)$ кривая γ_h замкнута. Определим переменную *действие*

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_h} p dq.$$

Если γ_h ограничивает область $D_h \subset D$, т.е. $\gamma_h = \partial D_h$, то по формуле Стокса

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{D_h} dp \wedge dq = \frac{\text{площадь}(D_h)}{2\pi}.$$

Имеем: $I = I(h) = I(H(q, p))$. Будем считать, что $\partial I / \partial h \neq 0$ при всех $h \in (a, b)$ ¹² и что $H_p = 0$ лишь в конечном числе точек на каждой из кривых γ_h . Построим переменную φ , канонически сопряженную к I , т.е. такую, что замена $(q, p) \mapsto (\varphi, I)$ каноническая. Пусть $W_q(q, I)$ – соответствующая производящая функция. Тогда

$$p = W_q(q, I), \quad \varphi = W_I(q, I).$$

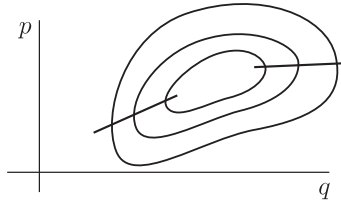


Рис. 15.1. Линии уровня функции $H(q, p)$ (они же – кривые γ_h). На двух “горизонтальных” кривых $\partial H / \partial p = 0$.

Чтобы найти W , выразим p из уравнения $I = I(H(q, p))$ через q и I . Для этого нужно, чтобы $\frac{\partial I}{\partial p} = \frac{\partial I}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial p} \neq 0$. Согласно нашим предположениям при $h \in (a, b)$ это выполнено везде на γ_h кроме конечного числа точек. Получаем набор функций $p = f_j(q, I)$, определенных там, где $\frac{\partial H}{\partial p} \neq 0$. Функции f_j продолжаются по непрерывности в точки, где $\frac{\partial H}{\partial p} = 0$.

Имеем набор уравнений для W : $(W_j)_q = f_j$. Так как W_j – первообразные по q от f_j , они определены с точностью до слагаемых вида $c_j(I)$.

Итак, $\varphi = \frac{\partial W_j}{\partial I} + c_j(I)$, причем $c_j(I)$ следует подобрать так, чтобы переменная φ была непрерывной при переходе через все кривые $\frac{\partial H}{\partial p} = 0$ кроме одной.

¹²Впрочем, это можно доказать.

Найдем приращение φ при обходе γ_h :

$$\Delta\varphi = \int_{\gamma_h} d\varphi = \int_{\gamma_h} \frac{\partial^2 W}{\partial I \partial q} dq = \frac{\partial}{\partial I} \int_{\gamma_h} p dq = 2\pi.$$

ЗАДАЧА 11. Построить переменные действие–угол для гармонического осциллятора $H = \frac{1}{2}(a^2 p^2 + b^2 q^2)$.

(Б). Разделение переменных. В простейшем случае переменные разделяются, если $H = H(f_1(q_1, p_1), \dots, f_m(q_m, p_m))$. Такие системы вполне интегрируемы по Лиувиллю. Функции $f_j(q_j, p_j)$, $j = 1, \dots, m$, являются первыми интегралами в инволюции. С точностью до замены времени система эквивалентна набору из m систем с одной степенью свободы

$$\dot{q}_j = \frac{\partial f_j}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial f_j}{\partial q_j}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Поэтому задача о введении переменных действие–угол сводится к случаю одной степени свободы.

(В). Общий случай. К сожалению, процедуру построения переменных действие–угол в общем случае вряд ли можно признать эффективной. Впрочем, вопрос об их существовании успешно решается. Переменные действия определяются как интегралы формы $p dq = \sum p_j dq_j$ по базисным циклам на торах M_f (см. (14.1)). Переменные φ строятся как канонически сопряженные к I . Подробности опустим.

16. Динамика в переменных действие–угол. Резонансные и нерезонансные частоты

Посмотрим, как выглядят уравнения Гамильтона и их решения в переменных действие–угол. Имеем

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial I} = \nu(I), \quad \dot{I} = \frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0.$$

Вектор $\nu(I) \in \mathbb{R}^m$ называется вектором частот.

Зафиксируем $I = I^0$ и рассмотрим движение на соответствующем торе

$$\mathbb{T}_{I^0}^m = \{(I, \varphi) : I = I^0\}. \quad (16.1)$$

Уравнение имеет вид

$$\dot{\varphi} = \nu, \quad \nu = \nu(I^0). \quad (16.2)$$

Стандартная мера $d\varphi_1 \wedge \cdots \wedge d\varphi_m$ на торе инвариантна.

Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – стандартное скалярное произведение в \mathbb{R}^m . Равенство

$$\langle k, \nu \rangle = 0, \quad k \in \mathbb{Z}^m,$$

называется резонансом. Случай $k = 0$ называется тривиальным резонансом и неинтересен. Если имеется нетривиальный резонанс, вектор частот $\nu(I)$ называется резонансным, а соответствующий тор \mathbb{T}_I^m резонансным.

ЗАДАЧА 12. Доказать, что множество резонансных векторов в \mathbb{R}^m всюду плотно, но имеет меру нуль.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16.1. Если вектор частот ν нерезонансный, то всякая траектория уравнения (16.2) обматывает соответствующий тор \mathbb{T}_I^m всюду плотно.

Проще всего это установить с помощью теоремы Вейля. Чтобы ее сформулировать, введем некоторые определения.

Пусть имеется функция $f: \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Ее пространственным средним называется

$$\langle f \rangle = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{T}^m} f(\varphi) d\varphi.$$

Временным средним называется

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi_0 + \nu t) dt$$

(если предел существует).

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\nu \in \mathbb{R}^m$ – нерезонансный вектор и функция $f: \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Риману. Тогда для почти любого $\varphi_0 \in \mathbb{T}^m$ временное среднее существует и равно пространственному среднему.

Доказательство теоремы 7 можно найти в [1].

Теперь доказательство предложения 16.1 сразу получается, если в теореме Вейля взять $f(\varphi) = \chi_B(\varphi)$ – характеристическую

функцию произвольного шара $B \subset \mathbb{T}^m$:

$$\chi_B(\varphi) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi \in B, \\ 0, & \text{если } \varphi \notin B. \end{cases}$$

Если вектор частот резонансный, то любая траектория обматывает всюду плотно некоторый тор меньшей размерности, лежащий в \mathbb{T}^m . В частности, если все компоненты вектора ν рациональны, то все траектории периодические.

ВОПРОС. Как вычислить размерность тора, получающегося как замыкание (в топологическом смысле) траектории в резонансном случае?

17. Классическая схема теории возмущений

Предположим, что интегрируемую систему, записанную в переменных действие–угол, слегка возмущили, то есть гамильтониан имеет вид

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi) + O(\varepsilon^2),$$

где ε – малый параметр. Используя разложения по ε , попытаемся найти автономную (не зависящую от t) каноническую замену

$$(I, \varphi \bmod 2\pi) \mapsto (J, \psi \bmod 2\pi),$$

приводящую гамильтониан $H(I, \varphi, \varepsilon)$ к виду $\mathcal{H}(J, \varepsilon)$. Если это удастся сделать, то (J, ψ) окажутся переменными действие–угол в возмущенной системе и уравнения движения легко решатся.

Будем задавать замену производящей функцией

$$W(J, \varphi, \varepsilon) = W_0(J, \varphi) + \varepsilon W_1(J, \varphi) + O(\varepsilon^2).$$

При $\varepsilon = 0$ и так все хорошо, поэтому естественно считать замену тождественной: $W_0 = J\varphi$.

Замена переменных имеет вид

$$\psi = \frac{\partial W}{\partial J} = \varphi + \varepsilon \frac{\partial W_1}{\partial J} + O(\varepsilon^2), \quad I = \frac{\partial W}{\partial \varphi} = J + \varepsilon \frac{\partial W_1}{\partial \varphi} + O(\varepsilon^2).$$

Новый гамильтониан $\mathcal{H} = H + W_t$ оказывается следующим:

$$\mathcal{H}(J, \varepsilon) = H\left(J + \varepsilon \frac{\partial W_1}{\partial \varphi} + O(\varepsilon^2), \varphi, \varepsilon\right). \quad (17.1)$$

Разлагая уравнение (17.1) в ряд по ε , получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0(J) + \varepsilon \mathcal{H}_1(J) + O(\varepsilon^2) \\ = H_0 \left(J + \varepsilon \frac{\partial W_1}{\partial \varphi} + O(\varepsilon^2) \right) \\ + \varepsilon H_1 \left(J + \varepsilon \frac{\partial W_1}{\partial \varphi} + O(\varepsilon^2), \varphi \right) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

В нулевом порядке по ε получаем $\mathcal{H}_0 = H_0$. Как и следовало ожидать, при $\varepsilon = 0$ гамильтонианы \mathcal{H} и H совпадают.

В первом порядке по ε имеем уравнение

$$\mathcal{H}_1(J) = \nu(J) \frac{\partial W_1}{\partial \varphi}(J, \varphi) + H_1(J, \varphi), \quad (17.2)$$

где, как обычно, $\nu(J) = \frac{\partial H_0(J)}{\partial J}$. Первое слагаемое в правой части, конечно, следует понимать как скалярное произведение.

Как решать это уравнение в частных производных? Пугаться не надо. Надо разложить в ряд Фурье. Пусть

$$H_1(J, \varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} H_1^k(J) e^{i\langle k, \varphi \rangle}, \quad W_1(J, \varphi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} W_1^k(J) e^{i\langle k, \varphi \rangle}.$$

Тогда

$$\nu \frac{\partial W_1}{\partial \varphi} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} i\langle \nu, k \rangle W_1^k e^{i\langle k, \varphi \rangle}.$$

Уравнение (17.2) рассыпается на независимые уравнения (для каждого k):

$$\begin{aligned} k = 0: \quad \mathcal{H}_1(J) &= H_1^0(J), \\ k \neq 0: \quad 0 &= i\langle \nu(J), k \rangle W_1^k(J) + H_1^k(J), \end{aligned}$$

откуда находим:

$$W_1^k(J) = -\frac{H_1^k(J)}{i\langle \nu(J), k \rangle}, \quad k \neq 0. \quad (17.3)$$

Аналогично можно найти $W_2(J), W_3(J), \dots$. Неужели задача о нахождении переменных действие–угол в возмущенной системе решена?

К сожалению, не все так просто. Надо бы проверить, сходится ли ряд $W_0 + \varepsilon W_1 + \varepsilon^2 W_2 + \dots$

Но на самом деле все существенно хуже. Знаменатели в (17.3) и аналогичных формулах для W_2, W_3, \dots обращаются в нуль на резонансных поверхностях

$$\Sigma_k = \{J \in \mathbb{R}^m : \langle \nu(J), k \rangle = 0\}.$$

В типичной ситуации поверхности Σ_k в совокупности образуют в \mathbb{R}^m всюду плотное множество, откуда следует, что производящая функция $W(J, \varphi)$ не определена нигде в \mathbb{R}^m . В этом состоит знаменитая проблема малых знаменателей, так сильно действующая на нервы специалистам по небесной механике и другим любителям и профессионалам теории возмущений.

Эти наблюдения наводят на мысль о неинтегрируемости типичного возмущения интегрируемой системы.

18. Введение в теорию КАМ

Классическая теория возмущений, как правило, не дает сходящихся разложений по малому параметру, потому что преследует слишком амбициозные цели: написать возмущенную¹³ систему в переменных действие–угол. Давайте попытаемся получить сходящиеся разложения для движений, аналогичных невозмущенным, не во всем фазовом пространстве, а лишь на некоторых подмногообразиях. На этом пути возникает теория Колмогорова–Арнольда–Мозера (КАМ). Ее основное утверждение состоит в том, что большинство из нерезонансных торов продолжает существовать и в возмущенной системе.

Чтобы сформулировать точный результат, понадобится два определения.

18.1. Диофантовы частоты. Во-первых, вместо условия нерезонансности нам потребуется так называемое условие сильной нерезонансности или диофантовости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18.1. Вектор частот $\nu \in \mathbb{R}^m$ называется диофантовым, если существуют постоянные $c, \gamma > 0$ такие, что

$$|\langle \nu, k \rangle| \geq \frac{c}{|k|^\gamma} \quad \text{для всех ненулевых } k \in \mathbb{Z}^m. \quad (18.1)$$

¹³Как правило, неинтегрируемую!

Смысл определения состоит в том, что малые знаменатели не слишком малы (допускают степенную по $|k|$ оценку снизу).

Скажем, что $\nu \in \mathcal{D}(c, \gamma)$, если выполнены неравенства (18.1).

ЛЕММА 18.1. Пусть $\gamma > m - 1$. Тогда

$$\text{meas} \left(\mathbb{R}^m \setminus \bigcup_{c>0} \mathcal{D}(c, \gamma) \right) = 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 18.1. Почти все векторы частот диофантовы.

Докажем лемму только в случае $m = 2$. В общем случае доказательство аналогично, но чуть более громоздко [5].

Заметим сначала, что гомотетия $\nu \mapsto \lambda \nu$ ($\lambda > 0$) не портит диофантовости. Действительно, если $\nu \in \mathcal{D}(c, \gamma)$, то $\lambda \nu \in \mathcal{D}(\lambda c, \gamma)$. Поэтому достаточно проверить, что неддиофантовы векторы образуют множество меры 0 на прямой $\{\nu_2 = 1\}$. Тогда отсюда будет следовать, что они образуют множество меры 0 на любой прямой $\{\nu_2 = c \neq 0\}$ (гомотетия). А из этого будет вытекать утверждение леммы (теорема Фубини).

Итак, $\nu_2 = 1$. Значения ν_1 , для которых не выполнено хотя бы одно неравенство (18.1), задаются условиями

$$|k_1 \nu_1 + k_2| > \frac{c}{|k|^\gamma} \quad \text{для некоторого ненулевого } k \in \mathbb{Z}^2. \quad (18.2)$$

Пусть $L(k)$ – множество тех $\nu_1 \in \mathbb{R}$, которые удовлетворяют (18.2). Наша задача – показать, что $\text{meas} \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^2} L(k) \rightarrow 0$ при $c \rightarrow 0$.

Имеем: $\text{meas} L(k) = \frac{2c}{k_1 |k|^\gamma}$. Следовательно

$$\text{meas} \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^2} L(k) \leq \sum_{k_1 \neq 0, k_2} \frac{2c}{k_1 |k|^\gamma}. \quad (18.3)$$

Теперь достаточно воспользоваться следующим утверждением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 18.1. При $\gamma > 1$ ряд (18.3) сходится.

Лемма доказана. ■

Докажем предложение 18.1. Достаточно проверить, что при $k_1 \neq 0, \gamma > 1$

$$\sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|k|^\gamma} < C \frac{1}{|k_1|^{\gamma-1}}, \quad \text{где } C = C(\gamma) \text{ – некоторая постоянная.}$$

Проверяем:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k_2=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|k|^\gamma} &= \frac{1}{|k_1|^\gamma} + 2 \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{1}{|k|^\gamma} \leq \frac{1}{|k_1|^\gamma} + 2 \int_0^{\infty} \frac{dk_2}{(k_1^2 + k_2^2)^\gamma} \\
 &\leq \frac{1}{|k_1|^\gamma} + \int_0^{\infty} \frac{2^{1+\gamma/2} dk_2}{(|k_1| + k_2)^\gamma} \\
 &= \frac{1}{|k_1|^\gamma} + \frac{2^{1+\gamma/2}}{\gamma-1} \frac{1}{|k_1|^\gamma} \\
 &\leq \left(1 + \frac{2^{1+\gamma/2}}{\gamma-1}\right) \frac{1}{|k_1|^\gamma}.
 \end{aligned}$$

По дороге мы воспользовались очевидным неравенством $k_1^2 + k_2^2 \geq \frac{1}{2}(|k_1| + |k_2|)^2$. ■

18.2. Стандартные условия невырожденности. Другое важное определение – определение невырожденности. Скажем, что интегрируемая по Лиувиллю система невырождена на торе $\mathbb{T}_{I^0}^m$ (см. (16.1)), если

$$\det \left(\frac{\partial H_0}{\partial I^2} \right) (I^0) \neq 0.$$

Рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi, \varepsilon), \quad (18.4)$$

где ε – малый параметр, а $I, \varphi \bmod 2\pi$ – канонические переменные: $I \in D$ для некоторой области $D \subset \mathbb{R}^m$, $\varphi \in \mathbb{T}^m$. Функция H_1 2π -периодична по φ .

При $\varepsilon = 0$ (I, φ) – переменные действие–угол.

18.3. Теорема Колмогорова.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $I^0 \in D$ – значение переменной действие такое, что

- (1) Вектор невозмущенных частот $\nu(I^0)$ диофантов,
- (2) Невозмущенная система невырождена на $\mathbb{T}_{I^0}^m$,
- (3) Функция H вещественно-аналитична.

Тогда инвариантный тор $\mathbb{T}_{I^0}^m$ невозмущенной системы не исчезнет при возмущении, а лишь слегка деформируется и по-прежнему будет нести квазипериодические движения с частотами $\nu(I^0)$, то есть в некоторых координатах $\psi \bmod 2\pi$ на нем уравнения Гамильтона останутся прежними: $\dot{\psi} = \nu(I^0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 18.1. Довольно скоро выяснилось, что все три условия теоремы 8 могут быть существенно ослаблены. В частности, условие аналитичности функции H может быть заменено на условие C^{2m+1} -гладкости.

19. Неавтономный вариант теоремы Колмогорова

Напомним, что гамильтоновой системой с $m + 1/2$ степенями свободы называется неавтономная гамильтонова система с m степенями свободы и периодической зависимостью гамильтониана от времени. Рассмотрим такую систему, в случае, когда функция Гамильтона имеет вид

$$H = H(I, \varphi, t, \varepsilon) = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi, t, \varepsilon). \quad (19.1)$$

Как обычно, (I, φ) – канонически сопряженные переменные, $I \in D \subset \mathbb{R}^m$, $\varphi \bmod 2\pi \in \mathbb{T}^m$. Зависимость H от t предполагается 2π -периодической. Поэтому естественно считать, что t определено $\bmod 2\pi$, т.е. $t \in \mathbb{T}^1$.

Точнее, на t следует смотреть с двух точек зрения. С одной стороны t – время, изменение которого определяет эволюцию системы. Это t лежит в \mathbb{R} . С другой стороны t – фазовая переменная. Изменение его на 2π не меняет H и уравнения движения. Это t лежит в $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = \mathbb{T}$. Традиционно обе эти переменные обозначаются одинаково, что несколько затуманивает суть дела. Впрочем, никаких ошибок из-за этого не возникает. Отметим, что указанный двойкий взгляд на переменную t мы уже использовали в разделе 4.

Рассмотрим сначала случай $\varepsilon = 0$. Эта система автономна. Однако, зная, что после возмущения t придется включить в список фазовых переменных, сделаем это уже сейчас. Невозмущенные уравнения становятся следующими:

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{\varphi} = \nu(I), \quad \dot{t} = 1.$$

Итак, невозмущенные торы $(m + 1)$ -мерные:

$$\{(I, \varphi, t): I = I^0 = \text{const}\}.$$

Вектор частот имеет вид $\begin{pmatrix} \nu(I) \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1}$.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $I^0 \in D$ – значение переменной действие такое, что

- (1) Вектор частот $\bar{\nu}^0 = \begin{pmatrix} \nu(I^0) \\ 1 \end{pmatrix}$ диофантов.
- (2) Невозмущенная система невырождена при $I = I^0$.
- (3) Функция H вещественно-аналитична.

Тогда инвариантный тор $\{I = I^0\}$ невозмущенной системы при возмущении не разрушится, а лишь слегка деформируется, будет существовать в возмущенной системе и по-прежнему нести квазипериодические движения с частотами $\bar{\nu}^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы сведем теорему 9 к теореме 8. Для этого сначала произведем автономизацию (см. раздел 11). Функция Гамильтона принимает следующий вид:

$$\mathcal{H}(I, E, \varphi, t, \varepsilon) = H(I, \varphi, t, \varepsilon) + E,$$

где H – гамильтониан (19.1), E – импульс, соответствующий координате t , новое время обозначаем s . Система стала автономной. Вектор частот при $\varepsilon = 0$ и $I = I^0$

$$\left. \begin{pmatrix} \partial \mathcal{H} / \partial I \\ \partial \mathcal{H} / \partial E \end{pmatrix} \right|_{\varepsilon=0, I=I^0} = \bar{\nu}^0$$

– тот, что надо. Однако невозмущенная система вырождена.

Чтобы справиться с этой трудностью, применим трюк, изобретенный Пуанкаре при исследовании задачи трех тел. Заметим, что вместо гамильтониана \mathcal{H} можно взять $f(\mathcal{H})$, где $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – произвольная гладкая функция.

ЗАДАЧА 13. Проверить, что при условии $f' \neq 0$ у новой системы траектории в фазовом пространстве $\mathbb{T}_\varphi^m \times \mathbb{T}_t \times D_I \times \mathbb{R}_E$ те же, что и у системы с гамильтонианом \mathcal{H} , но движение по ним происходит, вообще говоря, с другой скоростью.

Всегда можно считать, что $I^0 = 0$. В этой ситуации удобно взять $f = \exp(\cdot)$. Проверим, что невозмущенный гамильтониан

$e^{\mathcal{H}}|_{\varepsilon=0} = e^{H_0+E}$ уже невырожден. В самом деле,

$$H_0(I) = h + \langle \nu^0, I \rangle + \frac{1}{2} \langle I, AI \rangle + O(|I|^3),$$

где $h = H_0(0)$, $\nu^0 = \nu(I^0)$ и матрица $A = \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2}(0)$ невырождена согласно условию (2) теоремы 9.

Раскладывая функцию e^{H_0+E} в ряд Тейлора, получаем

$$\begin{aligned} e^{H_0+E} &= \exp \left(h + \langle \nu^0, I \rangle + \frac{1}{2} \langle I, AI \rangle + O(|I|^3) + E \right) \\ &= e^h \left(1 + \langle \nu^0, I \rangle + E + \frac{1}{2} \langle I, AI \rangle \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (E + \langle \nu^0, I \rangle)^2 + O((|I| + |E|)^3) \right). \end{aligned}$$

Итак, невозмущенная система имеет инвариантный тор, соответствующий значениям переменных действие $(I, E) = (I^0, 0)$. Частоты на этом торе равны $e^h \bar{\nu}^0$, причем система невырождена:

$$\det \left(\frac{\partial^2 e^{H_0+E}}{\partial (I, E)^2} \right) \Big|_{I=I^0, E=0} = \det \begin{pmatrix} A + \nu^0 (\nu^0)^T & \nu^0 \\ (\nu^0)^T & 1 \end{pmatrix} = \det A \neq 0.$$

Здесь ν^0 считается вектором-столбцом, а применение операции транспонирования превращает его в вектор-строку $(\nu^0)^T$. Таким образом $\nu^0 (\nu^0)^T$ – квадратная $m \times m$ -матрица. Аналогичные соображения используются и в дальнейшем.

Согласно теореме 8 система с гамильтонианом e^{H+E} имеет инвариантный тор с частотами $e^h \bar{\nu}^0$. Следовательно система с гамильтонианом $H + E$ имеет инвариантный тор с частотами $\tilde{\nu}$, пропорциональными указанным (см. задачу 13). Так как частота, соответствующая переменной t , равна единице, имеем $\tilde{\nu} = \bar{\nu}^0$. ■

20. Изоэнергетический вариант теоремы Колмогорова

Опять рассмотрим автономную систему с гамильтонианом (18.4). Следующая теорема дает информацию о сохранении инвариантных торов на данном уровне энергии.

ТЕОРЕМА 10. *Предположим, что инвариантный тор $\{I = I^0\}$ невозмущенной системы лежит на уровне энергии $\{H_0 = h\}$ и выполнены следующие условия.*

(1) *Частоты $\nu(I^0)$ диофантовы.*

(2) *Невозмущенная система изоэнергетически невырождена на этом торе:*

$$\det \begin{pmatrix} \partial^2 H_0 / \partial I^2(I^0) & \nu(I^0) \\ \nu^T(I^0) & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

(3) *Функция H вещественно-аналитична.*

Тогда на уровне энергии $\{H = h\}$ в возмущенной системе имеется инвариантный тор близкий к исходному. Частоты на этом торе задаются вектором $\lambda \nu(I^0)$, где $\lambda = 1 + O(\varepsilon)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы сведем теорему 10 к теореме 9. Понижим порядок системы на уровне энергии $\{H = h\}$. Для этого решим уравнение $H(I, \varphi, \varepsilon) = h$ относительно I_m . Это можно сделать так как

$$\frac{\partial H}{\partial I_m}(I, \varphi, \varepsilon) = \nu_m^0 + O(\varepsilon) \neq 0.$$

ВОПРОС. Почему $\nu_m^0 \neq 0$?

В результате получаем

$$I_m = -F(\tilde{I}, \tilde{\varphi}, \varphi_m, \varepsilon, h), \quad \tilde{I} = (I_1, \dots, I_{m-1}), \quad \tilde{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_{m-1}).$$

Так как $\dot{\varphi}_m = \partial H / \partial I_m \neq 0$, можно перейти к новому времени $t \mapsto \tau = \varphi_m$. Обозначая штрихом производную по τ , получаем уравнения

$$\tilde{\varphi}' = \partial F / \partial \tilde{I}, \quad \tilde{I}' = -\partial F / \partial \tilde{\varphi}.$$

Нам потребуется явная формула для F с точностью до $O(|\tilde{I}|^3) + O(\varepsilon)$.

Для простоты считаем, что $I^0 = 0$. Тогда разложение Тейлора для H имеет вид

$$H(\tilde{I}, I_m, \tilde{\varphi}, \varphi_m, \varepsilon) = h + \langle \tilde{\nu}^0, \tilde{I} \rangle + \nu_m^0 I_m + \langle \Pi, I \rangle / 2 + O(|y|^3) + O(\varepsilon),$$

где $h = H_0(0)$, $\tilde{\nu}^0 = (\nu_1^0, \dots, \nu_{m-1}^0)$ и $\Pi = \partial^2 H / \partial I^2(0)$. Таким образом из уравнения $H = h$ находим

$$I_m = -\frac{\langle \tilde{\nu}^0, \tilde{I} \rangle}{\nu_m^0} + O(|\tilde{I}|^2) + O(\varepsilon). \quad (20.1)$$

В частности, отсюда следует, что вектор частот в системе с гамильтонианом K имеет вид

$$\begin{pmatrix} \tilde{\nu}^0 / \nu_m^0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\nu_m^0} \nu^0.$$

(Как обычно, в неавтономной системе дописывается частота, соответствующая изменению времени $\tau' = 1$.) Полученный вектор частот, очевидно, диофантов.

Чтобы вычислить матрицу $\partial^2 K / \partial \tilde{I}^2$, необходимо повысить точность в (20.1) до $O(|\tilde{I}|^3) + O(\varepsilon)$. Положим

$$\Pi = \begin{pmatrix} \tilde{\Pi} & p \\ p^T & \Pi_{mm} \end{pmatrix}, \quad p \in \mathbb{R}^{m-1}.$$

Подставим в уравнение $H = h$

$$I_m = -\frac{\langle \tilde{\nu}^0, \tilde{I} \rangle}{\nu_m^0} + \Psi(I) + O(|\tilde{I}|^3) + O(\varepsilon),$$

где функция $\Psi(\tilde{I})$ предполагается квадратичной по \tilde{I} . Функция $\Psi(\tilde{I})$ легко находится, откуда получаем

$$\begin{aligned} I_m = & -\frac{1}{\nu_m^0} \left(\langle \tilde{\nu}^0, \tilde{I} \rangle + \frac{1}{2} \langle \tilde{\Pi} \tilde{I}, \tilde{I} \rangle \right. \\ & \left. - \langle p, \tilde{I} \rangle \frac{\langle \tilde{\nu}^0, \tilde{I} \rangle}{\nu_m^0} + \frac{\Pi_{mm}}{2} \left(\frac{\langle \tilde{\nu}^0, \tilde{I} \rangle}{\nu_m^0} \right)^2 \right) + O(|\tilde{I}|^3) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Итак,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{I}^2}(0) = \left(\frac{1}{\nu_m^0} \tilde{\Pi} - \frac{1}{(\nu_m^0)^2} (p \tilde{\nu}^T + \tilde{\nu} p^T) + \frac{\Pi_{mm}}{(\nu_m^0)^3} \tilde{\nu}^0 (\tilde{\nu}^0)^T \right)$$

Задача 14. Проверить, что

$$\begin{aligned} (\nu_m^0)^{1+m} \det \left(\frac{1}{\nu_m^0} \tilde{\Pi} - \frac{1}{(\nu_m^0)^2} (p (\tilde{\nu}^0)^T + \tilde{\nu}^0 p^T) + \frac{\Pi_{mm}}{(\nu_m^0)^3} \tilde{\nu}^0 (\tilde{\nu}^0)^T \right) \\ = -\det \begin{pmatrix} \Pi & \nu^0 \\ (\nu^0)^T & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом мы проверили, что условия теоремы 9 выполняются для невозмущенного тора $\tilde{I} = 0$ системы с гамильтонианом $F|_{\varepsilon=0}$. Инвариантный тор возмущенной системы с гамильтонианом F соответствует инвариантному тору в исходной системе на уровне энергии $\{H = h\}$. ■

21. Теория КАМ и проблема устойчивости в гамильтоновой динамике

Настоящий раздел носит обзорный характер. Подробности и ссылки можно найти в [3].

1. При малых значениях параметра ε из теоремы Колмогорова вытекает существование большого множества Q_ε квазипериодических движений. Пусть \mathcal{N}_ε – подмножество фазового пространства, дополнительное к Q_ε . Пусть D – область в фазовом пространстве такая, что ее замыкание \bar{D} компактно и любая точка множества \bar{D} лежит на инвариантном торе невозмущенной системы. Нейштадт доказал, что при условии невырожденности невозмущенной системы в D мера множества $D \cap \mathcal{N}_\varepsilon$ имеет порядок $O(\sqrt{\varepsilon})$. Так как мера множества Q_ε положительна, возмущенная система не может быть эргодичной¹⁴. Это создает известные трудности в основаниях статистической механики.

2. Теория КАМ дает средство для доказательства устойчивости по Ляпунову для типичных устойчивых в линейном приближении (эллиптических) периодических решений в автономных гамильтоновых системах с двумя степенями свободы. Действительно, понизим порядок в такой системе на уровне энергии M_h в окрестности эллиптической периодической траектории γ . Гамильтониан можно записать в виде

$$H(x, y, t) = \frac{1}{2}\mu(x^2 + y^2) + O((|x| + |y|)^3), \quad (21.1)$$

где x и y – канонически сопряженные переменные, а функция (21.1) – 2π -периодична по t . Траектория γ имеет вид $\{(x, y, t \bmod 2\pi) : x = y = 0\}$.

В окрестности кривой γ слагаемое O_3 в гамильтониане H может считаться малым возмущением. Вырожденность невозмущенной интегрируемой линейной системы с гамильтонианом $\mu(x^2 + y^2)/2$ может быть устранена путем нормализации в H членов третьего и четвертого порядка. А именно, предположим, что выполнены следующие условия:

$$\mu \neq 2\pi n/3, \quad \mu \neq \pi k/2, \quad n, k \in \mathbb{Z}. \quad (21.2)$$

¹⁴Тот же вывод справедлив, если ограничиться на уровень энергии.

Тогда с использованием преобразования Биркгофа гамильтониан (21.1) может быть приведен к виду

$$H(x, y, t) = \frac{1}{2}\mu(x^2 + y^2) + \mu_*(x^2 + y^2)^2 + O((|x| + |y|)^5). \quad (21.3)$$

Здесь μ_* – постоянная и новые канонические переменные опять обозначены x, y . Теперь в качестве невозмущенного гамильтониана можно взять $\mu(x^2 + y^2)/2 + \mu_*(x^2 + y^2)^2$. В случае $\mu_* \neq 0$ имеем невырожденность при малых значениях $(x^2 + y^2)$.

Отметим, что существование большого числа инвариантных торов в системе с гамильтонианом (21.3) не следует прямо из КАМ-теорем, сформулированных выше. Тем не менее, используя стандартные методы КАМ-теории можно доказать, что для как угодно малых $r > 0$ существуют двумерные инвариантные торы вида

$$\mathbb{T}_r^2 = \{(x, y, t \bmod 2\pi) : x^2 + y^2 + O_5(x, y) = r^2\}.$$

Теперь вернемся к исходной системе с двумя степенями свободы. Торы \mathbb{T}_r^2 , как и периодическое решение γ , лежат на уровне энергии M_h . Каждый тор делит трехмерное многообразие M_h на два инвариантных множества: внутренность полнотория (включающую, в частности, кривую γ) и его дополнение (см. рис. 15.1). Так как при $r \rightarrow 0$ торы \mathbb{T}_r^2 подходят как угодно близко к γ , перио-

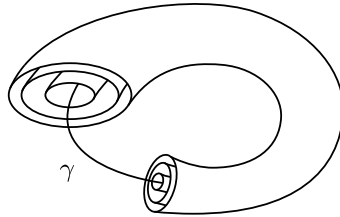


Рис. 21.1. Инвариантные торы, окружающие кривую γ на M_h .

дическое решение γ орбитально устойчиво по Ляпунову на уровне энергии M_h .

На соседних уровнях энергии $M_{h'}$ картина аналогична: периодические решения $\gamma_{h'}$, близкие к γ , окружены инвариантными торами. Отсюда вытекает орбитальная устойчивость γ в полной системе.

Отметим, что если условия отсутствия резонансов низких порядков (21.2) не выполнены или $\mu_* = 0$, решение γ может оказаться неустойчивым.

Аналогично, но проще, можно доказать, что из устойчивости периодического решения в линейном приближении, как правило, вытекает устойчивость по Ляпунову в случае системы с полутора степенями свободы. Это утверждение может быть применено для доказательства стабилизации верхнего положения равновесия в маятнике с быстро колеблющейся точкой подвеса (раздел 10) с учетом поправок $O(\varepsilon)$.

3. Рассмотрим вопрос об эволюции переменных действие в гамильтоновых системах, близких к интегрируемым (18.4). Этот вопрос обсуждался давно. В частности, в этих терминах может быть сформулирована проблема устойчивости солнечной системы, задача об удержании потока заряженных частиц в циклотроне и другие задачи, имеющие важное теоретическое и прикладное значение.

В предыдущем пункте показано, что в случае двух степеней свободы в типичной ситуации возмущенные траектории оказываются зажатými на трехмерных уровнях энергии в узких щелях между (двумерными) инвариантными торами. Отсюда легко вывести отсутствие эволюции переменных действие при малых возмущениях. Если степеней свободы больше, то указанных препятствий уже нет. Например, в случае трех степеней свободы уровни энергии имеют размерность 5, а торы трехмерны. Следовательно, торы не делят уровни энергии и даже в случае малых возмущений траектории, в принципе, могли бы, двигаясь между торами, уйти далеко в направлении изменения переменных действие. Вопрос о том, реализуется ли такая возможность, получил положительный ответ в статье Арнольда [2], где был построен пример нетривиальной эволюции переменных действия в возмущенной системе с двумя с половиной степенями свободы. Впоследствии в численных экспериментах было обнаружено, что указанная эволюция действий не имеет направленного характера и выглядит как случайное блуждание, в связи с чем Чириков предложил назвать это явление диффузией Арнольда.

В настоящее время основные вопросы, связанные с диффузией Арнольда звучат так. Является ли диффузия типичной? Какова

максимальная средняя скорость изменения действия на “диффузионных”¹⁵ траекториях?

Ответ на первый вопрос, несомненно, положителен. Но полные доказательства пока получены лишь в так называемых, априори неустойчивых системах¹⁶, где задача оказывается проще.

По поводу второго вопроса известно следующее. Согласно теории Нехорошева для систем (18.4) скорость диффузии экспоненциально мала, то есть для того, чтобы переменные действие сместились относительно своего начального значения на величину порядка единицы¹⁷, требуется время не меньше, чем порядка $e^{\alpha/|\varepsilon|^\beta}$, где α и β – положительные постоянные¹⁸. В априори неустойчивых системах эволюция действий может происходить существенно быстрее (со скоростью $\varepsilon/\log|\varepsilon|$). Впрочем, здесь доказательства опубликованы лишь в случае систем с $2\frac{1}{2}$ степенями свободы [7].

22. Антиинтегрируемый предел. Теорема Обри

Основные идеи и методы антиинтегрируемого предела удобно излагать на примере стандартного отображения Чирикова. В более общей ситуации соответствующие результаты содержатся в [6].

22.1. Динамика стандартного отображения Чирикова.

Сначала немного истории. Б. В. Чириков – новосибирский физик, в конце 50-х годов заинтересовавшийся проблемой неустойчивости электронных пучков в магнитных ловушках. Следуя обычной

¹⁵Лучше сказать, эволюционирующих.

¹⁶Типичным примером априори неустойчивой системы является возмущение интегрируемой гамильтоновой системы, являющейся прямым произведением системы, записанной в переменных действие–угол и математического маятника. Характерной особенностью таких систем является наличие асимптотических движений (сепаратрис) в невозмущенной системе. В окрестности этих движений хаотические явления развиваются существенно интенсивнее.

¹⁷То есть на положительную величину, не зависящую от ε .

¹⁸Важно иметь в виду, что экспоненциально малые эффекты имеют место лишь в (вещественно-)аналитических системах. Если гладкость гамильтониана конечна, скорость диффузии, вообще говоря, существенно выше (порядка ε^N , где $N > 0$ – постоянная, зависящая от степени гладкости).

физической идеологии, вместо того, чтобы пытаться описать явление во всех деталях, он предложил простейшую модель, ухватывающую суть происходящего. Такой моделью оказалось отображение T_ε цилиндра

$$\mathcal{Z} = \{(x, y) : x \bmod 2\pi\}$$

на себя, сопоставляющее точке $(x, y) \in \mathcal{Z}$ точку $T_\varepsilon(x, y) = (X, Y) \in \mathcal{Z}$, где

$$X = x + y + \varepsilon \sin x, \quad Y = y + \varepsilon \sin x. \quad (22.1)$$

Здесь ε – вещественный параметр, от значения которого зависит степень хаотичности динамики. Цилиндр \mathcal{Z} естественно считать фазовым пространством рассматриваемой динамической системы.

Динамикой в данном случае называют свойства траекторий, то есть последовательностей точек $(x_k, y_k) \in \mathcal{Z}$ таких, что для любого целого k

$$(x_{k+1}, y_{k+1}) = T_\varepsilon(x_k, y_k).$$

Цилиндр \mathcal{Z} является двумерным симплектическим многообразием относительно 2-формы $\omega = dy \wedge dx$.

ЗАДАЧА 15. Проверить, что отображение T_ε симплектическое, то есть $T_\varepsilon^* \omega = \omega$.

В настоящее время отображение T_ε считается одной из концептуально важнейших моделей в гамильтоновой динамике с двумя степенями свободы. Основная причина состоит в том, что формулы, задающие систему очень просты, тогда как все основные динамические эффекты, встречающиеся в более общих системах этого типа, есть и здесь.

Перейдем к обсуждению динамики. Сначала замечу, что для любого из присутствующих не составит труда посмотреть на траектории T_ε с помощью компьютера. Для этого полезно заметить, что при желании переменную y также можно считать угловой. Действительно, отображение T_ε “уважает” не только сдвиг переменной x на 2π , но и аналогичный сдвиг переменной y в том смысле, что для любых целых k и n

$$T_\varepsilon(x + 2\pi k, y + 2\pi n) = (X + 2\pi k, Y + 2\pi k + 2\pi n)$$

(сдвиг переменных X и Y тоже имеет вид $2\pi \cdot (\text{целое число})$). Поэтому можно попросить компьютер нарисовать на экране квадрат

$$S = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi\},$$

задать начальную точку $(x_0, y_0) \in S$ и нарисовать ее, вычислить точку $(x_1, y_1) = T_\varepsilon(x_0, y_0)$ и нарисовать ее, и т.д. Если очередная точка (x_n, y_n) оказалась вне квадрата, ее надо вернуть¹⁹ в S сдвигом переменной x и/или y на $2\pi k$ с целым k . В свое время я с большим интересом разглядывал получающиеся при этом траектории.

Что же все-таки происходит? Сначала положим $\varepsilon = 0$. В этом случае система интегрируема по Лиувиллю и более того, записана в переменных действие–угол. “Действие” y – первый интеграл. Любая траектория расположена на кривой (одномерном торе)

$$l_c = \{(x, y) \in \mathcal{Z} : y = c = \text{const}\}.$$

Кривая l_c поворачивается на угол c . Если число c/π рациональное, то траектория периодична, то есть замкнется через конечное число шагов. Если c/π иррационально, траектория всюду плотно заполнит окружность l_c . Такие кривые l_c называются нерезонансными.

В случае $\varepsilon \neq 0$ ситуация сильно усложняется. Надеяться на существование первого интеграла не приходится. Это связано с тем, что траектории (во всяком случае, некоторые из них) перестают ложиться на гладкие кривые типа окружностей l_c и начинают демонстрировать хаотическое поведение.

Впрочем, хаос возникает постепенно. Согласно теории КАМ при малых значениях параметра ε многие из нерезонансных кривых l_c в слегка деформированном виде будут существовать как инвариантные кривые для T_ε . Понимать это надо следующим образом. При малых ε на цилиндре \mathcal{Z} имеется много кривых $l_{c,\varepsilon}$, которые

- определены не для всех c , но для многих,
- близки²⁰ к кривым l_c ,
- инвариантны относительно T_ε , то есть состоят из траекторий,

¹⁹В сущности мы заменили (некомпактное) фазовое пространство \mathcal{Z} на (компактное) \mathbb{T}^2 , где $\mathbb{T}^2 = \{(x, y) \bmod 2\pi\}$ – двумерный тор.

²⁰То есть $l_{c,\varepsilon} \rightarrow l_c$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

– каждая из этих траекторий заполняет свою кривую всюду плотно.

Кривые $l_{c,\varepsilon}$ хорошо видны при численном счете на компьютере. Траектории, расположенные на них, принято считать регулярными.

Хаотические траектории на экране компьютера выглядят как “облака”, более или менее плотно заполненные точками. Можно доказать, что если ε мало и начальные условия берутся наугад, то вероятность попасть на одну из регулярных траекторий существенно выше, чем вероятность попасть на хаотическую траекторию.

Когда ε растет, кривые $l_{c,\varepsilon}$ разрушаются и хаоса становится больше. При больших ε в численном эксперименте видно, как одна траектория зарисовывает почти без дыр весь квадрат \mathcal{S} .

22.2. Антиинтегрируемый предел. Хаотические траектории можно построить и аналитически, без помощи компьютера. Особенно просто это можно сделать в антиинтегрируемом пределе, то есть при больших ε . Этим мы сейчас и займемся.

Сначала полезно переписать динамические уравнения (22.1) в “лагранжевой форме”. Пусть последовательность (x_k, y_k) , $k \in \mathbb{Z}$, – траектория стандартного отображения Чирикова. Тогда, для всех целых k

$$x_{k+1} = x_k + y_k + \varepsilon \sin x_k, \quad y_{k+1} = y_k + \varepsilon \sin x_k. \quad (22.2)$$

Исключая импульсы y_k , получаем

$$x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1} = \varepsilon \sin x_k. \quad (22.3)$$

Теперь отображение приобретает вид $(x_{k-1}, x_k) \mapsto (x_k, x_{k+1})$, а фазовый цилиндр становится следующим: $\{(x_-, x) \in \mathbb{R}^2\} / \sim$, где отношение эквивалентности \sim отождествляет любые две точки (x'_-, x') и (x''_-, x'') такие, что

$$x'_- - x''_- = x' - x'' = 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Траекториями будем считать последовательности $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, удовлетворяющие (22.3). В случае необходимости импульсы y_k можно вычислить из первого уравнения (22.2).

Чтобы понять как устроена динамика при больших ε , сначала рассмотрим случай $\varepsilon = \infty$. Формально говоря, при $\varepsilon = \infty$ динамики нет: x_{k+1} нельзя выразить через x_{k-1} и x_k . Однако нечто вроде траекторий имеется. Действительно, поделив на ε , получаем

$$\sin x_k = \frac{1}{\varepsilon}(x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}) = 0.$$

Поэтому траектории при $\varepsilon = \infty$ – это последовательности вида

$$x_k = \pi l_k, \quad l_k \in \mathbb{Z}. \quad (22.4)$$

Основная идея антиинтегрируемого предела состоит в том, что при больших ε стандартное отображение имеет много траекторий, похожих на (22.4).

Чтобы сформулировать точный результат, возьмем большое положительное число Λ и определим пространство кодов C_Λ , состоящее из последовательностей

$$a = \{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}, \quad a_k = \pi l_k, \quad l_k \in \mathbb{Z}, \quad |a_{k+1} - a_k| \leq \Lambda.$$

Таким образом, C_Λ – это пространство последовательностей (22.4) таких, что расстояния между точками a_{k+1} и a_k ограничены сверху числом Λ .

Для каждого кода $a \in C_\Lambda$ определим метрическое пространство последовательностей Π_a

$$x = \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}, \quad \sup_{k \in \mathbb{Z}} |x_k - a_k| < \infty.$$

Метрика на Π_a имеет вид

$$\rho(x', x'') = \sup_{k \in \mathbb{Z}} |x'_k - x''_k|, \quad x', x'' \in \Pi_a.$$

ТЕОРЕМА 11 (ОБРИ). Пусть зафиксированы (большое) $\Lambda > 0$ и (малое) $\sigma > 0$. Тогда существует $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\Lambda, \sigma) > 0$ такое, что для любого кода $a \in C_\Lambda$ и любого $\varepsilon > \varepsilon_0$ стандартное отображение Чирикова имеет траекторию $\hat{x} \in \Pi_a$, причем $\rho(\hat{x}, a) < \sigma$.

Траектория \hat{x} из теоремы 11 следует коду a в том смысле, что каждая из точек x_k отстоит от a_k не более чем на σ . Таким образом мы построили множество траекторий стандартного отображения, находящихся во взаимно однозначном соответствии с множеством кодов C_Λ .

ЗАДАЧА 16. Чему равна мощность множества C_Λ ?

Траектории \hat{x} естественно считать хаотическими, потому что они согласно нашему заказу могут прыгать по σ -окрестностям точек множества $\pi\mathbb{Z}$ почти произвольно (ограничение, состоящее в том, что величина прыжка не превосходит Λ , при больших Λ не очень обременительно). На самом деле, есть и более веские основания приписывать траекториям \hat{x} свойство хаотичности,²¹ но мы не будем здесь на этом останавливаться.

22.3. Доказательство теоремы Обри. Доказательство основано на применении метода сжимающих отображений в метрическом пространстве (Π_a, ρ) .

Перепишем уравнения (22.3) в виде

$$x_k = \arcsin_k \left(\frac{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}{\varepsilon} \right), \quad (22.5)$$

где \arcsin_k – ветвь арксинуса такая, что $\arcsin_k(0) = a_k \in \pi\mathbb{Z}$. Таким образом \arcsin_k отображает интервал $(-1, 1)$ на интервал $(a_k - \frac{\pi}{2}, a_k + \frac{\pi}{2})$ и траектория $x = a$ удовлетворяет уравнениям (22.5) при $\varepsilon = \infty$.

При больших, но конечных ε траекторию \hat{x} , удовлетворяющую (22.5), естественно искать следующим образом. Рассмотрим отображение $x \mapsto \tilde{x} = W(x)$ такое, что

$$\tilde{x}_k = \arcsin_k \left(\frac{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}{\varepsilon} \right).$$

Очевидно, любая неподвижная точка отображения W является траекторией стандартного отображения Чирикова.

ЛЕММА 22.1. Пусть $\varepsilon > \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\Lambda, \sigma)$ достаточно велико. Тогда

- (1) W определено на шаре $B_{a,\sigma} \subset \Pi_a$ с центром в a и радиусом σ ;
- (2) $W(B_{a,\sigma}) \subset B_{a,\sigma}$;
- (3) W является сжимающим отображением на $B_{a,\sigma}$, то есть

$$\rho(W(x'), W(x'')) < \frac{1}{2} \rho(x', x'') \quad \text{для любых } x', x'' \in B_{a,\sigma}. \quad (22.6)$$

²¹Несложно показать, что \hat{x} образуют гиперболическое множество в стандартном отображении Чирикова.

Ясно, что теорема 11 следует из леммы 22.1. Поэтому обратимся к доказательству леммы. Далее удобно считать, что $\sigma < \pi/2$.

(1)+(2) Чтобы проверить, что $W(B_{a,\sigma}) \subset B_{a,\sigma}$, достаточно показать, что для любого $x \in B_{a,\sigma}$

$$\left| \frac{x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}}{\varepsilon} \right| < \sin \sigma. \quad (22.7)$$

Так как $\rho(x, a) < \sigma$ и $a \in C_\Lambda$, имеем

$$|x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1}| \leq |x_{k+1} - x_k| + |x_k - x_{k-1}| \leq 2(\Lambda + 2\sigma).$$

Таким образом неравенство (22.7) выполнено, если взять

$$\varepsilon_0 > \frac{2(\Lambda + 2\sigma)}{\sin \sigma}.$$

(3) Заметим, что для любой пары вещественных чисел $u', u'' \in (-\sin \sigma, \sin \sigma)$ выполнена оценка

$$|\arcsin_k u' - \arcsin_k u''| \leq \frac{1}{\cos \sigma} |u' - u''|.$$

Причина состоит в том, что

$$\frac{1}{\cos \sigma} = \sup_{u \in (-\sin \sigma, \sin \sigma)} \left| \frac{d}{du} \arcsin_k u \right|.$$

Положим $\tilde{x}' = W(x')$, $\tilde{x}'' = W(x'')$. Тогда для любого $k \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\begin{aligned} |\tilde{x}'_k - \tilde{x}''_k| &= \left| \arcsin_k \left(\frac{x'_{k+1} - 2x'_k + x'_{k-1}}{\varepsilon} \right) - \arcsin_k \left(\frac{x''_{k+1} - 2x''_k + x''_{k-1}}{\varepsilon} \right) \right| \\ &\leq \frac{1}{\cos \sigma} \left| \frac{x'_{k+1} - 2x'_k + x'_{k-1}}{\varepsilon} - \frac{x''_{k+1} - 2x''_k + x''_{k-1}}{\varepsilon} \right| \\ &\leq \frac{|x'_{k+1} - x''_{k+1}| + 2|x'_k - x''_k| + |x'_{k-1} - x''_{k-1}|}{\varepsilon \cos \sigma} \\ &\leq \frac{4}{\varepsilon \cos \sigma} \rho(x', x''). \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (22.6) выполнено, если

$$\varepsilon_0 > \frac{8}{\cos \sigma}.$$

Лемма 22.1 доказана. ■

22.4. Заключительные соображения. Хочется обратить внимание слушателей на одно весьма неприятное обстоятельство. Дело в том, что все известные к настоящему времени методы построения хаотических траекторий в применении к отображению T_ε и аналогичным системам дают метрически тощее хаотическое множество. Имеется в виду следующее. При произвольном ε рассмотрим множество точек, лежащих на хаотических траекториях: траекториях, которые мы можем построить всеми доступными к настоящему времени аналитическими методами. Получится некоторое подмножество цилиндра \mathcal{Z} . Оказывается, это хаотическое множество всегда имеет меру нуль.

Это не противоречит тому факту, что хаотических траекторий бесконечно много. Но это противоречит нашей физической интуиции. Хаос при больших ε должен доминировать! На эту же мысль наводит разглядывание результатов компьютерного счета. А может быть компьютеру в этом вопросе нельзя доверять? Ведь он считает с конечной точностью. . .

Все-таки специалисты верят в то, что верна следующая

ГИПОТЕЗА. При $\varepsilon \neq 0$ хаос в стандартном отображении Чиркова и системах такого типа живет на множествах положительной меры.

Одной из важнейших проблем гамильтоновой динамики в настоящее время является доказательство или опровержение этой гипотезы.

В заключение приведем две картинки из [6] с результатами численного построения траекторий стандартного отображения.

23. Расщепление сепаратрис

23.1. Наблюдение Пуанкаре. Рассмотрим гамильтонову систему с полутора степенями свободы, полученную в результате неавтономного возмущения системы с одной степенью свободы. Имеется в виду система

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2, \quad (23.1)$$

где D – область и

$$H(x, y, t, \varepsilon) = H_0(x, y) + \varepsilon H_1(x, y, t) + O(\varepsilon^2). \quad (23.2)$$

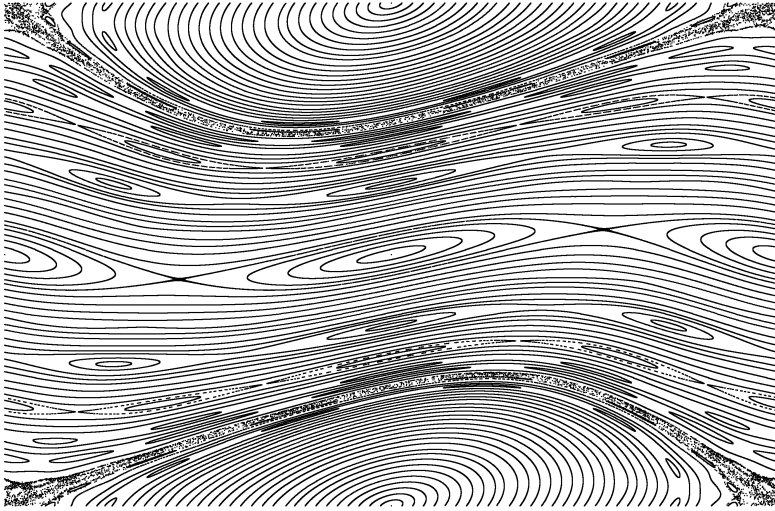


Рис. 22.1. Около сотни траекторий стандартного отображения при $\varepsilon = 0.9$.

Предполагается, что H 2π -периодичен по t , а ε – как обычно, малый параметр.

Пусть $z_0 = (x_0, y_0) \in D$ – положение равновесия в невозмущенной ($\varepsilon = 0$) системе: $\text{grad } H_0(z_0) = 0$. В расширенном фазовом пространстве $D \times \mathbb{T}$ ($\mathbb{T} = \{t \bmod 2\pi\}$) вместо положения равновесия имеем 2π -периодическую траекторию $z_0 \times \mathbb{T}$.

Предположим, что положение равновесия (и следовательно, соответствующее периодическое решение) гиперболично. Это означает следующее. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H_0}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 H_0}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 H_0}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 H_0}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} (z_0)$$

– матрица, задающая линеаризацию системы $(23.1)|_{\varepsilon=0}$ в положении равновесия z_0 . Очевидно, $\text{tr } A = 0$. Условие гиперболичности состоит в том, что собственные значения A лежат вне мнимой оси, т.е. $\det A < 0$. Гиперболические положения равновесия гамильтоновых систем экспоненциально неустойчивы.

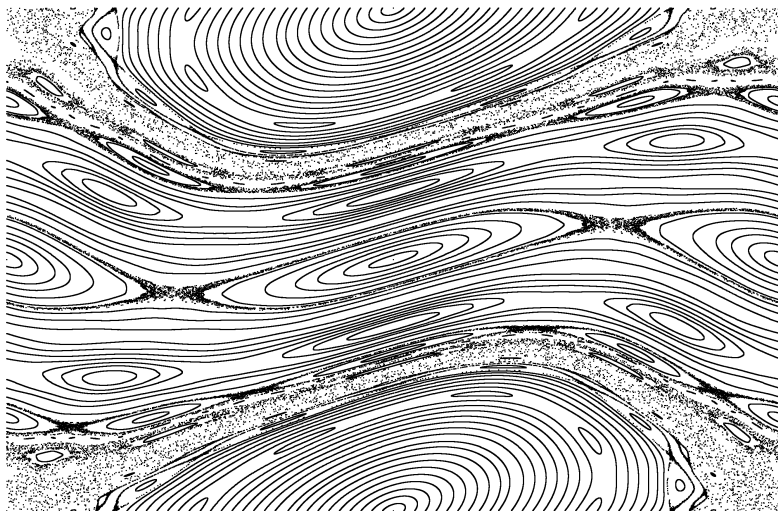


Рис. 22.2. Траектории стандартного отображения при $\varepsilon = 0.14$. По сравнению с рис. 22.1 хаотические облака более заметны.

На критическом уровне энергии $H_0(x, y) = H_0(z_0)$ невозмущенной системы помимо точки z_0 имеются также асимптотические кривые – сепаратрисы $\Lambda^{s,u}$ ²². Напомним, что асимптотические многообразия определяются как множества решений, стремящихся к данному решению (в нашем случае $(x(t), y(t)) \equiv z_0$) или семейству решений, при $t \rightarrow +\infty$ (Λ^s) или при $t \rightarrow -\infty$ (Λ^u). Еще одно предположение об устройстве невозмущенной системы состоит в том, что сепаратрисы двоясны: $\Lambda^s = \Lambda^u = \Lambda$ ²³. В расширенном фазовом пространстве имеем двумерные асимптотические поверхности $\Lambda^s \times \mathbb{T} = \Lambda^u \times \mathbb{T} = \Lambda \times \mathbb{T}$.

ЗАДАЧА 17. Доказать, что при малых значениях параметра ε возмущенная система имеет 2π -периодическое решение $(\sigma_\varepsilon(t), t)$, $\sigma_\varepsilon(t) = z_0 + O(\varepsilon) \in D$.

²² s от слова “stable” и u от слова “unstable” – не очень удачные, но общепринятые обозначения.

²³Это предположение, в сущности, означает, что кривые $\Lambda^{s,u}$ не уходят на бесконечность и не “втыкаются” в другие положения равновесия.

УКАЗАНИЕ. Достаточно доказать существование неподвижной точки $z_\varepsilon = z_0 + O(\varepsilon)$ для отображения Пуанкаре $T_\varepsilon: D \times \{0\} \rightarrow D \times \{0\}$. Существование решения уравнения $T_\varepsilon(z) = z$ легко получается из теоремы о неявной функции. При этом вместо условия гиперболичности понадобится более слабое условие невырожденности $\det A \neq 0$.

Периодическое решение $(\sigma_\varepsilon(t), t)$ из задачи 17 гиперболично (не будем уточнять смысл этого утверждения). Поэтому согласно теореме Адамара–Перрона²⁴ имеются поверхности $W_\varepsilon^{s,u} \subset D \times \mathbb{T}$, асимптотические к $(\sigma_\varepsilon(t), t)$. Они являются малыми деформациями невозмущенных поверхностей $W_0^{s,u} = \Lambda^{s,u} \times \mathbb{T}$.

Замечательным открытием Пуанкаре является тот факт, что, как правило, поверхности W_ε^s и W_ε^u не совпадают при $\varepsilon \neq 0$. Чтобы пояснить значение этого наблюдения для динамики, полезно попытаться нарисовать эти поверхности. Рисовать мы будем не в трехмерном пространстве, а на сечении Пуанкаре $D \times \{0\}$. Тогда периодическое решение $(\sigma_\varepsilon(t), t)$ будет изображаться точкой $z_\varepsilon = \sigma_\varepsilon(0)$, а вместо поверхностей $W_\varepsilon^{s,u}$ будем иметь кривые $\Lambda_\varepsilon^{s,u} = W_\varepsilon^{s,u} \cap \{t = 0\}$.

Основные соображения, применяемые при получении правой части рис. 23.1 состоят в следующем.

(а) При малых ε кривые Λ_ε^u и Λ_ε^s (а также Λ^s и Λ_ε^s) должны мало отличаться, во всяком случае, пока $\Lambda_\varepsilon^{s,u}$ не ушли достаточно далеко от точки z_ε .

(б) Кривые $\Lambda_\varepsilon^{s,u}$ инвариантны относительно отображения Пуанкаре T_ε .

(в) Кривые $\Lambda_\varepsilon^{s,u}$ не могут иметь самопересечений, но, в принципе, могут пересекаться друг с другом.

(г) Любая точка $z_* \neq z_\varepsilon$ пересечения кривых Λ_ε^s и Λ_ε^u (называемая согласно Пуанкаре, *гомоклинической точкой*) переходит под действием T_ε (а также T_ε^{-1}) опять в гомоклиническую точку.

(д) Около неподвижной точки z_ε T_ε приблизительно задается своим линейным приближением: оно растягивает вдоль Λ_ε^u и сжимает вдоль Λ_ε^s .

(е) Отображения T_ε и T_ε^{-1} сохраняют площади. В частности, площади заштрихованных областей (лунок) на рис. 23.1 совпадают.

²⁴Эту теорему умел доказывать еще Пуанкаре.

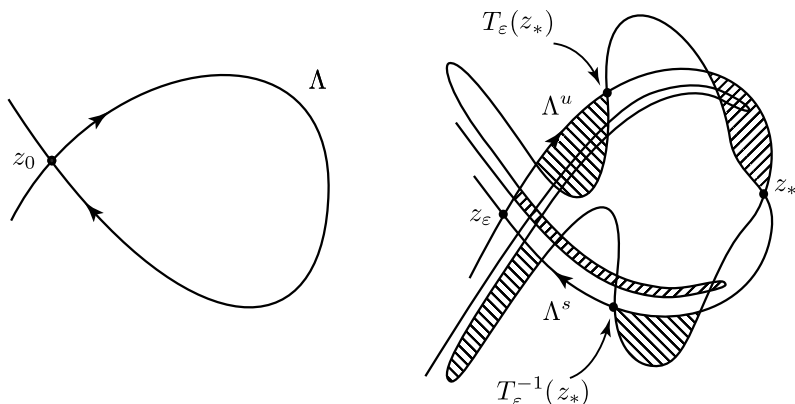


Рис. 23.1. Сложное поведение сепаратрис при $\varepsilon \neq 0$ (справа) в отличие от невозмущенного случая (слева) на сечении Пуанкаре $\{(x, y, t) : t = 0 \bmod 2\pi\}$. Заштрихованные области (лунки) переходят друг в друга при отображении T_ε . Поэтому их площади равны.

Теперь остается предположить, что кривые Λ_ε^s и Λ_ε^u пересекаются трансверсально, скажем, в точке z_* , и почти автоматически возникает правая часть рис. 23.1. Характерной особенностью полученной картинке является чрезвычайно сложная и запутанная сеть, образованная кривыми $\Lambda_\varepsilon^{s,u}$, что свидетельствует о сложности динамики в возмущенной системе.

Вот, кстати, некоторые соображения, из которых несложно вывести неинтегрируемость системы, сепаратрисы которой ведут себя так, как изображено на рисунке 23.1. Пусть F – вещественно-аналитический первый интеграл отображения T_ε , то есть $F = F \circ T_\varepsilon$. Так как кривые $\Lambda_\varepsilon^{s,u}$ состоят из траекторий асимптотических к точке z_ε , функция F на $\Lambda_\varepsilon^{s,u}$ должна принимать постоянное значение, равное $F(z_\varepsilon)$. Но можно показать, что вещественно-аналитическая функция, постоянная на множестве, устроенном так сложно, обязана быть тождественной постоянной.

23.2. Интеграл Пуанкаре. Нашей дальнейшей задачей является снабдить предыдущие качественные рассуждения результатами количественного типа. Расщепление сепаратрис можно измерять по-разному. Один из наиболее естественных способов –

посчитать симплектическую площадь двухугольной лунки между двумя гомоклиническими точками (см. рис. 23.1). Основным инструментом для этого и других подобных вычислений является интеграл Пуанкаре, определяемый ниже.

Пусть $\gamma(t)$ – естественная параметризация Λ , т.е.

$$\gamma(t) = (\hat{x}(t), \hat{y}(t)). \quad (23.3)$$

– решение уравнений (23.1). Так как добавление к гамильтониану произвольной функции, зависящей только от t и ε , не влияет на динамику, без ограничения общности будем считать, что $H_1(z_0, t) \equiv 0$. Таким образом, *интеграл Пуанкаре*

$$\mathcal{P}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(\gamma(t + \tau), t) dt$$

сходится.

ЗАДАЧА 18. Доказать, что функция $\mathcal{P}(\tau)$ 2π -периодична.

ЗАДАЧА 19. Проверить тождество

$$\frac{d\mathcal{P}(\tau)}{d\tau} = \int_{-\infty}^{+\infty} \{H_0, H_1\}(\gamma(t + \tau), t) dt.$$

Функция \mathcal{P} содержит всю информацию о расщеплении сепаратрис в первом приближении по ε .

ТЕОРЕМА 12. Пусть τ_1 и τ_2 – две последовательные невырожденные критические точки функции \mathcal{P}^{25} . Тогда им соответствует пара гомоклинических точек таких, что площадь $\mathcal{A}(\varepsilon)$ соответствующей лунки равна

$$\mathcal{A}(\varepsilon) = |\varepsilon\mathcal{P}(\tau_1) - \varepsilon\mathcal{P}(\tau_2)| + O(\varepsilon^2). \quad (23.4)$$

23.3. Доказательство теоремы 12.

Уравнение Гамильтона–Якоби. Следуя Пуанкаре, рассмотрим случай, когда Λ однозначно проектируется на ось x (так что рис. 23.1, формально говоря, нашим доказательством не охватывается). В общем случае доказательство основано на тех же идеях (см. например, [6]).

²⁵ Другими словами, два простых последовательных нуля функции \mathcal{P}' .

Кривая Λ (см. рис. 23.2) задается уравнением $y = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)$ для некоторой функции $\varphi(x)$. Аналогичное уравнение имеем и в расширенном фазовом пространстве, т.е. поверхность $W_0^s = W_0^u$ имеет вид

$$\left\{ (x, y, t) : y = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) \right\}.$$

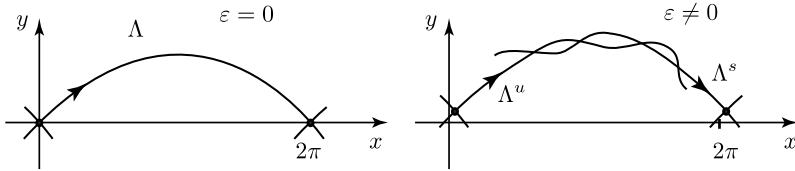


Рис. 23.2. Случай, рассматриваемый в доказательстве теоремы 12 возникает, когда переменная x – угловая. Например, при неавтономном возмущении математического маятника. Сепаратрисы при этом выглядят примерно так, как показано на рисунке.

Возмущенные асимптотические поверхности задаются следующим образом:

$$\left\{ (x, y, t) : y = \frac{\partial S^{s,u}}{\partial x}(x, t, \varepsilon) \right\}, \quad S^{s,u}(x, t, 0) = \varphi(x).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 23.1. Функции $S^{s,u}$ определены неоднозначно: с точностью до добавления произвольных функций $f^{s,u}(t, \varepsilon)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 23.1. Можно считать, что функции $S^{s,u}$ удовлетворяют уравнению²⁶

$$\frac{\partial S^{s,u}}{\partial t}(x, t, \varepsilon) + H\left(x, \frac{\partial S^{s,u}}{\partial x}(x, t, \varepsilon), t, \varepsilon\right) = 0. \quad (23.5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 23.2. Уравнение (23.5) при $\varepsilon = 0$ показывает, что если мы хотим, чтобы равенства $S^{s,u}(x, t, 0) = \varphi(x)$ выполнялись точно, а не с точностью до добавления функции от t , следует положить $H_0|_{\Lambda} = 0$. Это всегда можно сделать.

Доказательство предложения 23.1 основано на прямом вычислении. Пусть $(x, y, t) = (x, \frac{\partial S}{\partial x}(x, t, \varepsilon), t)$ – точка, лежащая на W_ε

²⁶Надеюсь, все узнали уравнение Гамильтона–Якоби.

(индексы s, u для краткости не пишем), и $(\cdot)' = \frac{d}{dt}$, как всегда, обозначает производную по времени в силу уравнений (23.1). Тогда

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial t}(x, t, \varepsilon) + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(x, t, \varepsilon) \dot{x} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y, t, \varepsilon) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}(x, t, \varepsilon), t, \varepsilon\right) + \frac{\partial H}{\partial y}(x, y, t, \varepsilon) \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(x, t, \varepsilon).\end{aligned}$$

Заметим, что в первом слагаемом последней строки при вычислении производной по x учитывается, что x входит в H два раза: как обычный аргумент H и как аргумент S .

Так как согласно уравнениям Гамильтона слагаемые $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \dot{x}$ и $\frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}$ равны друг другу, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial S}{\partial t}(x, t, \varepsilon) + H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}(x, t, \varepsilon), t\right) \right) = 0.$$

Поэтому для некоторой функции $\alpha(t, \varepsilon)$

$$\frac{\partial S}{\partial t}(x, t, \varepsilon) + H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}(x, t, \varepsilon), t\right) = \alpha(t, \varepsilon).$$

Согласно замечанию 23.1 α можно считать равной нулю. ■

Функции $S_1^{s,u}$ и интеграл Пуанкаре. Разложим уравнения (23.5) в ряд по ε . Пусть $S = \varphi(x) + \varepsilon S_1(x, t) + O(\varepsilon^2)$. Тогда в нулевом приближении по ε имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x) + H_0\left(x, \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = 0.$$

Это уравнение уже обсуждалось в замечании 23.2.

В первом приближении получаем

$$\frac{\partial S_1^{s,u}}{\partial t}(x, t) + H_1\left(x, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, t\right) + \frac{\partial H_0}{\partial y}\left(x, \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \frac{\partial^2 S_1^{s,u}}{\partial x \partial t}(x, t) = 0. \quad (23.6)$$

Так как $\partial H_0 / \partial y = \dot{x}$ (точка означает производную вдоль невозмущенной системы $(23.1)|_{\varepsilon=0}$), равенство (23.6) переписывается в виде

$$\frac{d}{dt} S_1^{s,u}(x, t) + H_1\left(x, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, t\right) = 0. \quad (23.7)$$

Подставим в (23.7) вместо x его параметризацию $\hat{x}(t + \tau)$ (см. (23.3)). Тогда

$$\left(\hat{x}(t + \tau), \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\hat{x}(t + \tau)) \right) = \gamma(t + \tau).$$

Интегрируя по t , имеем

$$\begin{aligned} S_1^s(\hat{x}(t + \tau), t) - S_1^s(\hat{x}(+\infty), t) &= \int_t^{+\infty} H_1(\gamma(s + \tau), s) ds, \\ S_1^u(\hat{x}(t + \tau), t) - S_1^u(\hat{x}(-\infty), t) &= - \int_{-\infty}^t H_1(\gamma(s + \tau), s) ds. \end{aligned}$$

(Напомним, что $\hat{x}(-\infty) = \hat{x}(+\infty) = x_0$.) Следовательно,

$$S_1^s(\hat{x}(t + \tau), t) - S_1^u(\hat{x}(t + \tau), t) = \mathcal{P}(\tau) + \beta(t),$$

где $\beta(t) = S_1^s(x_0, t) - S_1^u(x_0, t)$. Дифференцируя по τ , получаем

$$\dot{\hat{x}}(t + \tau) \frac{\partial}{\partial x} (S_1^s(\hat{x}(t + \tau), t) - S_1^u(\hat{x}(t + \tau), t)) = \mathcal{P}'(\tau). \quad (23.8)$$

Гомоклинические точки и лунки. Гомоклинические точки задаются уравнениями $(x, \frac{\partial S^s}{\partial x}) = (x, \frac{\partial S^u}{\partial x})$, т.е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\hat{x}(t + \tau)) + \varepsilon \frac{\partial S_1^s}{\partial x}(\hat{x}(t + \tau), t) + O(\varepsilon^2) \\ - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\hat{x}(t + \tau)) - \varepsilon \frac{\partial S_1^u}{\partial x}(\hat{x}(t + \tau), t) + O(\varepsilon^2) = 0, \end{aligned}$$

где мы опять подставили $\hat{x}(t + \tau)$ вместо x . С учетом (23.8) и соотношения $\dot{\hat{x}}(t + \tau) \neq 0^{27}$ после сокращения на ε получаем

$$\mathcal{P}'(\tau) + O(\varepsilon) = 0.$$

Таким образом, невырожденным критическим точкам функции $\mathcal{P}(\tau)$ отвечают гомоклинические точки.

ВОПРОС. При чем тут невырожденность и в каком смысле понимать предыдущее высказывание?

²⁷Кстати, почему $\dot{\hat{x}}(t + \tau) \neq 0$?

Пусть τ_1 и τ_2 – две последовательные невырожденные критические точки функции $\mathcal{P}(\tau)$. Соответствующие гомоклинические точки $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ на сечении Пуанкаре $\{t = 0 \bmod 2\pi\}$ являются “углами” некоторой лунки. Посчитаем ее площадь $\mathcal{A}(\varepsilon)$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\varepsilon) &= \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial S^s}{\partial x}(x, 0, \varepsilon) - \frac{\partial S^u}{\partial x}(x, 0, \varepsilon) \right) dx \right| \\ &= \left| \int_{x_1}^{x_2} \left(\varepsilon \frac{\partial S_1^s}{\partial x}(x, 0) - \varepsilon \frac{\partial S_1^u}{\partial x}(x, 0) \right) dx \right| + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Произведем в интеграле замену переменных $x = \hat{x}(\tau)$. С учетом (23.8) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\varepsilon) &= \left| \int_{\tau_1}^{\tau_2} \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} (S_1^s(\hat{x}(\tau), 0) - S_1^u(\hat{x}(\tau), 0)) \dot{\hat{x}}(\tau) d\tau \right| + O(\varepsilon^2) \\ &= \left| \int_{\tau_1}^{\tau_2} \varepsilon \mathcal{P}'(\tau) d\tau \right| + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

откуда сразу вытекает (23.4).

23.4. Стандартный пример. В качестве стандартного модельного примера удобно представлять себе маятник с (не быстро) вертикально периодически колеблющейся точкой подвеса, т.е. систему с гамильтонианом

$$H(x, y, t, \varepsilon) = \frac{1}{2}y^2 + \Omega^2 \cos x + \varepsilon \theta(t) \cos x, \quad (23.9)$$

где $\theta(t)$ – периодическая функция времени. Произведя в случае необходимости замену времени $t \mapsto \lambda t$, можем считать, что θ 2π -периодична, или, другими словами, частота колебаний точки подвеса равна 1.

Невозмущенная сепаратриса вместе с естественной параметризацией $\gamma(t)$ может быть вычислена явно.

Задача 20. Проверить, что

$$\cos(\hat{x}(t)) = 1 - 2 \operatorname{ch}^{-2}(2\Omega t).$$

Таким образом, $\mathcal{P}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t) (\cos(\hat{x}(t + \tau)) - 1) dt$.

ЗАДАЧА 21. Проверить, что если $\theta(t) = \cos t$, то

$$\mathcal{P}(\tau) = -\frac{\pi \cos \tau}{2\Omega^2 \operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2\Omega}\right)}.$$

В случае $\theta(t) = \cos t$ лунки имеют площадь

$$\mathcal{A}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon \pi}{\Omega^2 \operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2\Omega}\right)} + O(\varepsilon^2).$$

Список литературы

- [1] Арнольд В. И., *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1974, [Zbl 0647.70001](#).
- [2] Арнольд В. И., “Неустойчивость динамических систем с многими степенями свободы”, *ДАН СССР*, **156**:1 (1964), 9–12, [Zbl 0135.42602](#).
- [3] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И., *Математические аспекты классической и небесной механики*, Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, **3**, ВИНТИ, М., 1985.
- [4] Кац М., *Вероятность и смежные вопросы в физике*, Мир, М., 1965, [Zbl 0133.39803](#).
- [5] Шмидт В. М., *Диофантовы приближения*, Мир, М., 1983, [MR 0702837](#).
- [6] Трещев Д. В., *Введение в теорию возмущений гамильтоновых систем*, Фазис, М., 1998, [MR 1679494](#).
- [7] Treschev D., “Evolution of slow variables in a priori unstable Hamiltonian systems”, *Nonlinearity*, **17** (2004), 1803–1841, [doi 10.1088/0951-7715/17/5/014](#), [MR 2086152](#), [Zbl 1075.37019](#), [ADS 2004Nonli...17.1803T](#).